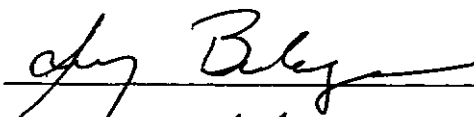

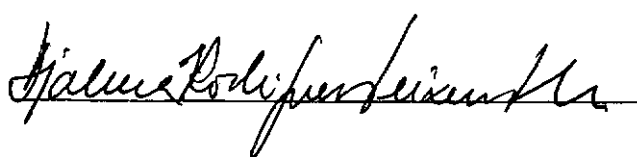


COMPORTAMENTO TERMOELÁSTICO TRANSIENTE NO ACOPLAMENTO DE
CILINDROS CIRCULARES CONCÊNTRICOS

ANTONIO ARLINDO GUIDETTI PORTO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
FEVEREIRO DE 1973

A minha esposa

A minha filha

A G R A D E C I M E N T O S

Ao insigne Professor Doutor Luiz Bevilacqua, da COPPE, pelo incentivo, dedicação e ensinamentos recebidos, pela eficiente orientação da tese, o preito de profundo respeito e o testemunho da admiração do autor.

Ao Professor Doutor Djalma Rodrigues Teixeira Filho , da COPPE, pelo apoio e valiosas críticas construtivas.

Ao Professor Doutor Antonio Luiz Adami, da Universidade de Brasília, pela indicação de outras referências bibliográficas e úteis pontos de vista trocados.

A meu pai Doutor Arlindo Lopes Porto, pela revisão do manuscrito e incentivo.

Ao Centro de Processamento de Dados da Universidade de Brasília, na pessoa de seu ilustre Diretor, Professor Marcio Santos, pelo assessoramento na utilização do computador IBM-1130.

A COPPE/UFRJ, pelo suporte financeiro, em parte.

A Thereza G. Giacomo, funcionária da Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, pelo exce-

lente trabalho datilográfico.

Finalmente, o autor agradece aos que direta e indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

S I N O P S E

O presente trabalho fundamentalmente, compreende: cálculo do deslocamento no contorno interno de um cilindro circular oco produzido por um campo transiente de temperatura e cálculo da tensão normal transiente na interface do acoplamento de dois cilindros circulares sob efeito térmico.

Neste estudo admite-se que o material dos cilindros seja homogêneo e isotrópico e obedeça à lei de Hooke. Não é considerado acoplamento termodinâmico entre deformação e temperatura e o problema é analisado com comportamento quase-estático.

S Y N O P S I S

The fundamental scope of this dissertation can be summarized in two itens:

- a) determination of the displacement at the internal boundary of a hollow circular cylinder , under a transient temperature field.
- b) determination of the coupling stress between a cilinder with radius "a" fitted into a hollow cilinder with radii "a" and "b", under a transient temperature field.

It is assumed that both cylinders are homogeneous, isotropic and follow Hooke's law for elastic materials. Strain-temperature coupling is disregarded and the analysis assumes quasi-static behavior.

SIMBOLOGIA

<u>Símbolo</u>	<u>Definição</u>	<u>Dimensão</u>
A	Valor dependente da condição de contorno para deslocamento ou - tensão.	-
$A_i (i=1,2)$	Valores dependentes da condição de contorno para deslocamento ou tensão.	-
a	Raio interno do cilindro.	L
a_t	Coeficiente de dilatação linear.	θ^{-1}
a_0	Raio do cilindro no ítem 3.3.	L
$a_n (n=1,2,...)$	Pólos de função complexa.	-
B	Valor dependente da condição de contorno para deslocamento ou <u>ten</u> são.	-
B_2	Valor dependente da condição de contorno para deslocamento ou <u>ten</u> são.	-
b	Raio externo do cilindro.	L
C	Valor dependente da condição de contorno para temperatura.	-

<u>Símbolo</u>	<u>Definição</u>	<u>Dimensão</u>
$C_i (i=1,2)$	Valores dependentes da condição de contorno para temperatura.	-
c	Constante auxiliar.	-
$c_i (i=1,2)$	Constantes auxiliares.	-
D	Valor dependente da condição de contorno para temperatura.	-
D_2	Valor dependente da condição de contorno para temperatura.	-
E	Módulo de elasticidade.	$F L^{-2}$
e	Dilatação cúbica.	-
F	Função usada para definição da transformada de Laplace.	-
F_i	Força de massa.	$F L^{-3}$
\bar{F}	Transformada de Laplace de F .	-
f	Temperatura inicial.	θ
\bar{G}	Função auxiliar para cálculo da inversa da transformada de Laplace da temperatura.	-
$\bar{G}_i (i=1,2,3)$	Funções auxiliares para o cálculo da inversa da transformada de Laplace da temperatura.	-

<u>Símbolo</u>	<u>Definição</u>	<u>Dimensão</u>
$I_n (n=0,1,\dots)$	Função de Bessel modificada de primeira espécie de ordem n .	-
i	Imaginário puro.	-
$J_n (n=0,1,\dots)$	Função de Bessel de primeira espécie de ordem n .	-
j	Expoente inteiro.	-
$K_n (n=0,1,\dots)$	Função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem n .	-
k	Constante auxiliar.	-
ℓ	Constante auxiliar.	-
M	Constante auxiliar.	-
$M_i (i=1,2,3,4)$	Valores auxiliares.	-
m	Constante igual a $\frac{\zeta}{\lambda + 2\mu} = \frac{1+\nu}{1-\nu} a_t$	θ^{-1}
N	Limite superior de intervalo de tempo.	T
n	Ordem das funções de Bessel.	-
$n_j (j=1,2,3)$	Componentes do vetor unitário normal a superfície.	-

<u>Símbolo</u>	<u>Definição</u>	<u>Dimensão</u>
P	Função auxiliar. .	-
p	Variável auxiliar.	-
Q	Função auxiliar.	-
q	Variável auxiliar.	-
R	Raio do contorno de integração.	-
Res	Resíduo de função complexa.	-
r	Coordenada radial.	-
S	Função auxiliar	-
s	Argumento da função transforma- da de Laplace.	-
s_m	Pólos.	-
s_n	Pólos.	-
T	Temperatura.	θ
T_o	Temperatura inicial.	θ
T_i	Temperatura ambiente.	θ
$T_i (i=1,2)$	Temperaturas.	θ
\bar{T}	Transformada de Laplace da temperatura.	-
\bar{T}_h	Solução da equação diferen- cial homogênea.	-
\bar{T}_p	Solução particular da equação diferencial.	-

<u>Símbolo</u>	<u>Definição</u>	<u>Dimensão</u>
$\bar{T}_i (i=1,2)$	Transformadas de Laplace das temperaturas.	-
t	Variável tempo.	T
t_0	Constante indicativa de tempo.	T
U	Função auxiliar.	-
u_{rr}	Deslocamento radial.	L
$u_{ij} (i,j=1,2,3)$	Componentes do deslocamento.	L
x	Variável auxiliar.	-
$Y_n (n=0,1,...)$	Função de Bessel de segunda espécie de ordem n.	-
y	Variável auxiliar.	-
$Z_n (n=0,1,...)$	Representação das funções de Bessel.	-
z	Coordenada axial.	-
α	Difusibilidade térmica.	$L^2 T^{-1}$
β	Índice superior de integração.	-
γ	Constante real.	-
$\gamma_i (i=1,2)$	Função auxiliar.	-

<u>Símbolo</u>	<u>Definição</u>	<u>Dimensão</u>
δ	Variável auxiliar.	-
δ_m	Solução da equação dos pólos.	-
δ_{ij}	Símbolo de Kronecker.	-
ϵ_{rr}	Deformação radial.	-
ϵ_{zz}	Deformação axial.	-
$\epsilon_{\phi\phi}$	Deformação tangencial.	-
$\epsilon_{ij} (i,j=1,2,3)$	Componentes do tensor tensão.	-
ζ	Constante real igual a $(3\lambda+2\mu)a_t$.	θ^{-1}
η	Índice inferior de integração.	-
θ	Constante real.	-
λ	Constante de Lamé.	$F L^{-2}$
λ	Constante auxiliar na pg. 29.	-
λ_n	Solução da equação dos pólos.	-
μ	Constante de Lamé.	$F L^{-2}$
ν	Constante de Poisson.	-
ρ	Massa específica.	$FL^{-4}T^2$

<u>Símbolo</u>	<u>Definição</u>	<u>Dimensão</u>
σ_{rr}	Tensão normal.	FL^{-2}
σ_{zz}	Tensão axial.	FL^{-2}
$\sigma_{\phi\phi}$	Tensão tangencial.	FL^{-2}
$\sigma_{ij}(i,j=1,2,3)$	Componentes do tensor tensão.	FL^{-2}
τ	Constante igual a b/a .	-

I N D I C E

AGRADECIMENTOS	ii
SINOPSE	iv
SYNOPSIS	v
SIMBOLOGIA	vi
ÍNDICE	xiii
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - RELAÇÕES BÁSICAS E EQUAÇÕES DA TERMOELASTI- CIDADE	4
2.1 - Equações Gerais	4
2.2 - Equação para o Estado Plano de Defor- mação em Coordenadas Cilíndricas e no Caso de Simetria Axial	6
2.3 - Equação da Condução do Calor	8
CAPÍTULO III-PROBLEMAS QUASE-ESTÁTICOS	9
3.1 - Resolução da Equação do Deslocamento Radial	9
3.2 - Deslocamento do Raio Interno de um Ci- lindro Circular Oco Devido Unicamente a um Campo de Temperatura	10

3.3 - Tensão Normal na Interface de dois Cilindros Circulares em Contato Devido a um Campo de Temperatura	13
---	----

CAPÍTULO IV - CAMPOS TRANSIENTES DE TEMPERATURA EM COORDENADAS CILÍNDRICAS	22
--	----

4.1 - Resolução da Equação da Condução do Calor	22
---	----

4.2 - Campo de Temperatura em Cilindro Circular Oco	24
---	----

4.3 - Campo de Temperatura em Dois Cilindros Circulares de Mesmo Material em Intimo Contato	32
---	----

CAPÍTULO V - DESLOCAMENTO NO RAIOS INTERNO DE UM CILINDRO CIRCULAR OCO QUE SE OBTÉM QUANDO SE APLICA UMA TEMPERATURA CONSTANTE NO CONTORNO INTERNO	46
--	----

CAPÍTULO VI - TENSÃO NORMAL NA INTERFACE PRODUZIDA PELO ACOPLAMENTO DE DOIS CILINDROS CIRCULARES ...	51
--	----

6.1 - Determinação da Tensão Normal	51
---	----

CAPÍTULO VII-CONCLUSÕES	60
-------------------------------	----

TRABALHOS FUTUROS	67
-------------------------	----

APÊNDICE I	68
------------------	----

APÊNDICE II	74
APÊNDICE III	78
APÊNDICE IV	80
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	92

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A termoelasticidade descreve o comportamento dos corpos elásticos sob a influência de campos gradientes de temperatura. As equações gerais que ligam tensões, deformações e temperaturas são muito complexas, uma vez que o campo de temperatura depende termodinamicamente da variação da dilatação e vice-versa, além de, em altas temperaturas, o material se comportar de forma diferente quer elástica quer termicamente. O acoplamento de deformação com temperatura pode ser formulado do seguinte modo: aplicando-se cargas no sólido surgirá um campo de temperatura e um campo de temperatura produzirá um campo de deformação [1], [2].

Quando as deformações, temperaturas e variações de temperatura forem pequenas as expressões que relacionam tensão com deformação e temperatura podem ser linearizadas. O calor produzido no corpo devido às deformações pode ser desprezado, desde que não seja um caso de choque térmico, o qual ocasionará uma mudança brusca de temperatura na superfície do sólido. Com essas considerações tem-se um desacoplamento entre deformação e temperatura, o que significa que a determina-

ção do campo de temperatura é calculado independentemente das variações de deformação. Ainda com pequenas variações de temperatura pode-se desprezar o efeito de forças de inércia desde que não seja problema vibratório ou de propagação de ondas. Concluindo significa uma termoelasticidade de pequenas deformações, de baixas temperaturas e de pequenas variações de temperatura [1], [2].

Os problemas analisados neste trabalho são do tipo - desacoplado, sem considerar forças de inércia.

O objetivo principal da tese é a determinação das tensões que surgem na interface do acoplamento de um cilindro oco com um maciço. Tal acoplamento é obtido aplicando-se uma temperatura constante no contorno interno do cilindro oco, durante um certo tempo, de tal modo que o cilindro maciço entre sem folga dentro daquele. Logo após surgirá um regime transitório de temperatura o que ocasionará um transitório de tensões normais na interface.

A determinação dos campos de deslocamento e de tensão pode ser realizada através do uso do método de V.M. Mayse1. A qui não foi usado este processo pois os casos que são analisados apresentam simetria axial e a integração direta da equação dos deslocamentos é bastante fácil.

Dentre os vários processos utilizados para a integração da equação da condução do calor aqui foi feito uso da transformada de Laplace.

CAPÍTULO II

RELAÇÕES BÁSICAS E EQUAÇÕES DA TERMOELASTICIDADE

Seja um sólido elástico homogêneo, isotrópico sujeito a um estado de tensão e deformação. Tal estado é devido à aplicação de pressões superficiais, de forças e massa e também de um campo de temperatura.

Na termoelasticidade linear as equações que relacionam tensões, deformações e temperaturas são chamadas de relações de Duhamel-Neuman que são uma generalização das expressões de Hooke da elasticidade isotérmica.

2.1 - Equações Gerais

A fim de não sobrecarregar a tese com deduções longas que estão já bem expostas em tratados clássicos, segue-se um resumo das expressões fundamentais para o problema da termoelasticidade linear:

Equações de Duhamel-Neuman [1]:

Deformação em função de tensão

$$\epsilon_{ij} = \alpha_t T \delta_{ij} + \frac{1 + \nu}{E} [\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1 + \nu} \sigma_{kk} \delta_{ij}] \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

Tensão em função de deformação

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(e - \frac{1+\nu}{\nu} a_t T \right) \delta_{ij} \right] \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

Relações entre deformação e deslocamento [1]

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

Equações de compatibilidade geométrica [1]

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{j\ell,ik} - \epsilon_{ik,j\ell} = 0 \quad i, j, k, \ell = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

Equações do movimento [1]

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

Condições de contorno [1]

$$\sigma_{ij} n_j = p_i$$

$$\text{ou} \quad u_i = g_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

$$u_i = g_i$$

Equações do deslocamento [1]

Substituindo as equações 2.1 e 2.3 em 2.5 no ca-

so estático, tem-se três equações que envolvem as três componentes do deslocamento.

$$\mu u_{i, kk} + (\lambda + \mu) u_{k, ki} + F_i - \zeta T, i = 0 \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2.7)$$

A resolução de tais equações juntamente com as condições de contorno determina o vetor deslocamento.

2.2 - Equações para o Estado Plano de Deformação em Coordenadas Cilíndricas e no Caso de Simetria Axial

As expressões em coordenadas cilíndricas ficam bastante simplificadas quando se tem a simetria axial e, como todos os problemas analisados neste trabalho apresentam tal simetria, seguem-se algumas expressões e equações sujeitas a esta restrição:

Equações de Duhamel-Neuman [1]

$$\sigma_{rr} = 2\mu \epsilon_{rr} + (\lambda e - \zeta T) \quad (2.8)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = 2\mu \epsilon_{\phi\phi} + (\lambda e - \zeta T) \quad (2.9)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e - \zeta T \quad (2.10)$$

Relação entre deformação e deslocamento [1]

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_{rr}}{\partial r} \quad (2.11)$$

$$\epsilon_{\phi\phi} = \frac{u_{rr}}{r} \quad (2.12)$$

$$\epsilon_{zz} = 0 \quad (2.13)$$

Tensões função do deslocamento radial [1]

Substituindo as expressões 2.11, 2.12 e 2.13 em 2.8 , 2.9, 2.10, chega-se a:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_{rr}}{\partial r} + \lambda \frac{u_{rr}}{r} - \zeta T \quad (2.14)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \lambda \frac{\partial u_{rr}}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_{rr}}{r} - \zeta T \quad (2.15)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \frac{\partial u_{rr}}{\partial r} + \lambda \frac{u_{rr}}{r} - \zeta T \quad (2.16)$$

Equação do deslocamento [1]

$$\nabla^2 u_{rr} - \frac{u_{rr}}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} a_t \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (2.17)$$

2.3 - Equação da Condução do Calor

A equação da condução em sólidos homogêneos, isotrópicos, sem acoplamento de temperatura e deformação e sem fonte interna de calor é dada da seguinte forma [1], [3], [4], [5], [6]:

$$\alpha \nabla^2 T - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2.18)$$

A equação 2.18 em coordenadas cilíndricas com simetria axial de temperatura e independente da coordenada z se transforma em:

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2.19)$$

CAPÍTULO III

PROBLEMAS QUASE-ESTÁTICOS

Um campo não estacionário de tensões, implica em um problema dinâmico, isto é, deve-se levar em conta, em geral, a aceleração das partículas nas equações que governam o movimento. Se a variação das tensões no tempo for pequena essa aceleração pode ser desprezada. Quando se faz esta aproximação recai-se numa classe particular de problemas denominados quase-estáticos.

3.1 - Resolução da Equação do Deslocamento Radial

Admitindo-se um campo de temperatura simétrico e independente da coordenada z , obtém-se um campo de deslocamento do mesmo tipo, desde que não hajam forças de massa.

A determinação dos deslocamentos é feita através da resolução da equação 2.17.

Depois de algumas transformações algébricas tal equação se transforma em:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r^2 u_{rr})}{\partial r} - m T \right] = 0 \quad (3.1)$$

Através de simples integração obtêm-se a expressão do deslocamento:

$$u_{rr}(r,t) = A(t) r + B(t) r^{-1} + m r^{-1} \int_{\eta}^r x T(x,t) dx \quad (3.2)$$

Os parâmetros $A(t)$ e $B(t)$ são determinados através das condições de contorno e a constante η pode ser escolhida convenientemente a partir da geometria do problema analisado.

Com a substituição do deslocamento dado pela 3.2 na 2.14, tem-se a expressão da tensão normal:

$$\sigma_{rr}(r,t) = 2 \left[(\lambda + \mu)A(t) - \mu r^{-2} B(t) - \mu m r^{-2} \int_{\eta}^r x T(x,t) dx \right] \quad (3.3)$$

3.2 - Deslocamento do Raio Interno de um Cilindro Circular Oco Devido Unicamente a um Campo de Temperatura

O cilindro oco, de comprimento ilimitado de raios a e b interno e externo respectivamente, está sujeito somente ao campo de temperatura $T(r,t)$ (Fig. 3.1).

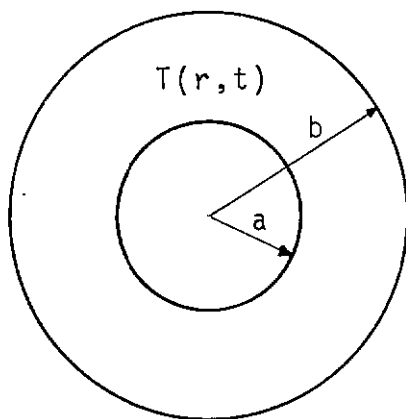


Fig. 3.1

De acordo com a suposição acima, as condições de contorno serão dadas por:

$$\sigma_{rr} (a, t) = 0 \quad (3.4)$$

$$\sigma_{rr} (b, t) = 0 \quad (3.5)$$

Escolhendo-se $\eta = a$ na expressão 3.2 e aplicando-se as condições 3.4 e 3.5, chega-se a um sistema linear em $A(t)$ e $B(t)$.

$$(\lambda + \mu) A(t) - \mu a^{-2} B(t) = 0 \quad (3.6)$$

$$(\lambda + \mu) A(t) - \mu b^{-2} B(t) = \mu b^{-2} \int_a^b x T(x,t) dx$$

Cuja resolução conduz a:

$$A(t) = \frac{\mu m}{(\lambda + \mu) (b^2 - a^2)} \int_a^b x T(x, t) dx \quad (3.7)$$

$$B(t) = \frac{a^2 m}{(b^2 - a^2)} \int_a^b x T(x, t) dx \quad (3.8)$$

Substituindo-se esses valores em 3.2, obtêm-se o deslocamento radial dado por [1]:

$$u_{rr}(r, t) = m \left[\frac{1}{r} \int_a^r x T(x, t) dx + \frac{1}{b^2 - a^2} \left(\frac{a^2}{r} + \frac{\mu r}{\lambda + \mu} \right) \int_a^b x T(x, t) dx \right] \quad (3.9)$$

Para se determinar o deslocamento radial no raio interno basta fazer $r = a$ em 3.9, o que conduz a:

$$u_{rr}(a, t) = \frac{m (\lambda + 2\mu) a}{(\lambda + \mu) (b^2 - a^2)} \int_a^b x T(x, t) dx \quad (3.10)$$

É interessante determinar a variação do deslocamento no raio interno que se obtêm quando se tem um campo genérico de temperatura $T(r, t)$ e um campo constante T_i (temperatura ambiente), para isso basta determinar o deslocamento para o campo T_i e subtrair do deslocamento dado pela 3.10. Então para o

campo constante facilmente chega-se a:

$$u_{rr}(a,t) = \frac{m(\lambda + 2\mu)a}{2(\lambda + \mu)} T_i \quad (3.11)$$

Consequentemente, o deslocamento no raio interno tomando-se como referência o deslocamento obtido à temperatura ambiente \bar{e} :

$$u_{rr}(a,t) = \frac{m(\lambda + 2\mu)a}{\lambda + \mu} \left[\frac{1}{b^2 - a^2} \int_a^b x T(x,t) dx - \frac{1}{2} T_i \right] \quad (3.12)$$

Ou expressando-se 3.12 em função da relação dos raios, do coeficiente de Poisson e do coeficiente de dilatação linear, vem:

$$u_{rr}(a,t) = a(1+\nu) a_t \left[\frac{2}{a^2(\tau^2 - 1)} \int_a^b x T(x,t) dx - T_i \right] \quad (3.13)$$

3.3 - Tensão Normal na Interface de Dois Cilindros Circulares em Contato Devido a um Campo de Temperatura

Pretende-se determinar a tensão normal em regime transitório na interface do acoplamento de um cilindro oco com um cilindro maciço. No instante inicial o cilindro maciço aloja-se sem folga dentro do cilindro oco de forma que a tensão nor-

mal na interface é nula. Neste mesmo instante a distribuição de temperatura nos dois cilindros é arbitrária. É suposto também que a superfície externa do cilindro oco esteja livre de tensões. Nessas condições a tensão normal na superfície de contato dependerá das distribuições transitórias de temperatura nos cilindros, que surgem pela troca de calor através da interface e pela troca de calor através do contorno externo com o meio ambiente.

Segue a dedução da tensão normal na interface.

Sejam dois cilindros infinitos de mesmo material sendo que o cilindro maciço tem raio a_0 e o cilindro oco raios a e b , interno e externo respectivamente, em um estado natural, correspondente à temperatura $T(r,t)=0$, onde não haja nem deformação nem tensão (Fig. 3.2). Note-se que neste estado natural os raios a e a_0 não são iguais. Mas a partir do instante inicial $t = 0$ e para qualquer $t > 0$ com a aplicação do campo de temperatura $T_1(r,t)$ no cilindro maciço e $T_2(r,t)$ no cilindro oco os dois cilindros deverão se tocar.

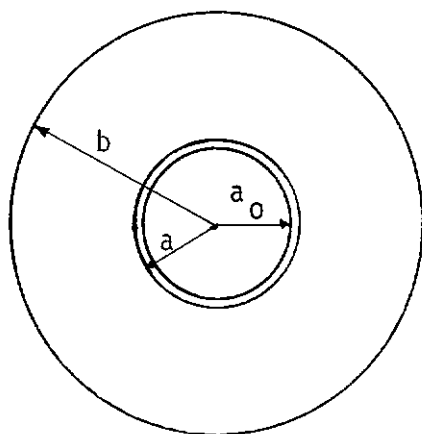


Fig. 3.2

Então com a aplicação dos campos $T_1(r,t)$ e $T_2(r,t)$ (Fig. 3.3), surge um campo de deslocamento e de tensão dados pelas expressões 3.2 e 3.3, respectivamente.

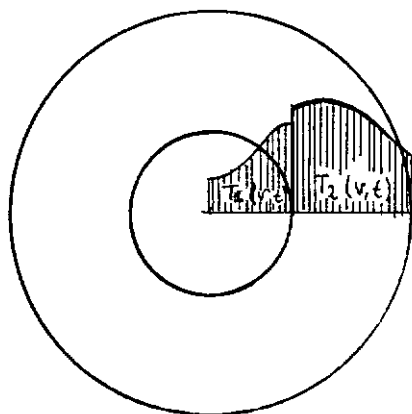


Fig. 3.3

Tem-se então as condições impostas ao problema:

1.ª condição - No eixo do cilindro maciço deve-se ter deslocamento e tensão finitos.

Com esta imposição pode-se escrever as expressões do deslocamento e tensão para a região $0 \leq r \leq a_0$ na seguinte forma:

$$u_{rr}(r,t) = A_1(t) r + m r^{-1} \int_0^r x T_1(x,t) dx \quad (3.14)$$

$$\sigma_{rr}(r,t) = 2 \{(\lambda + \mu) A_1(t) - \mu r^{-2} \int_0^r x T_1(x,t) dx\} \quad (3.15)$$

Nesse caso as fórmulas 3.2 e 3.3, tem o coeficiente do termo r^{-1} e η nulos.

Para a região $a \leq r \leq b$ as expressões do deslocamento e tensão podem ser escritas da seguinte forma:

$$u_{rr}(r,t) = A_2(t) r + B_2(t) r^{-1} + m r^{-1} \int_a^r x T_2(x,t) dx \quad (3.16)$$

$$\sigma_{rr}(r,t) = 2 \{(\lambda + \mu) A_2(t) - \mu B_2(t) r^{-2} - \mu m r^{-2} \int_a^r x T_2(x,t) dx\} \quad (3.17)$$

2.ª condição - A superfície externa do cilindro oco de

ve ser livre de tensões, portanto:

$$\sigma_{rr} (b,t) = 0 \quad (3.18)$$

3ª condição - A superfície externa do cilindro maciço deve permanecer em contato com a superfície interna do cilindro oco, então:

$$a_0 + u_{rr} (a_0, t) = a + u_{rr} (a, t) \quad (3.19)$$

4ª condição - Na superfície de contato, deve-se ter a mesma tensão normal, daí segue que:

$$\sigma_{rr} \left\{ \left[a_0 + u_{rr} (a_0, t) \right], t \right\} = \sigma_{rr} \left\{ \left[a + u_{rr} (a, t) \right], t \right\} \quad (3.20)$$

Como os deslocamentos são pequenos segue que:

$$\sigma_{rr} (a_0, t) = \sigma_{rr} (a, t) \quad (3.21)$$

5ª condição - No instante inicial, isto é, para uma distribuição de temperaturas $T_1 (r,0)$ e $T_2 (r,0)$ a tensão normal na interface deve ser nula, conseqüentemente:

$$\sigma_{rr} (a, 0) = 0 \quad (3.22)$$

Pela substituição de 3.14 e 3.16 em 3.19, chega-se em:

$$a_0 A_1(t) - a A_2(t) - a^{-1} B_2(t) = - m a_0^{-1} \int_0^{a_0} x T_1(x, t) dx + (a - a_0) \quad (3.23)$$

Como $a \sim a_0$ a expressão 3.23 se transforma em:

$$a^2 A_1(t) - a^2 A_2(t) - B_2(t) = - m \int_0^a x T_1(x, t) dx + a(a - a_0) \quad (3.24)$$

Pode-se observar que a aproximação realizada não implica em desprezar o termo em $(a - a_0)$ pois este é da ordem de grandeza dos demais da expressão 3.24, uma vez que $A_1(t)$, $A_2(t)$ e $B_2(t)$, devem ser da ordem de grandez de $(a - a_0)$, desde que a constante m seja suficientemente pequena (ver expressão 3.27 a 3.29).

Substituindo 3.15 e 3.17 em 3.21 e fazendo a mesma aproximação como a feita em 3.23, tem-se:

$$(\lambda + \mu) a^2 A_1(t) - (\lambda + \mu) a^2 A_2(t) + \mu B_2(t) = \mu m \int_0^a x T_1(x, t) dx \quad (3.25)$$

Finalmente substituindo 3.17 em 3.18, chega-se em:

$$(\lambda + \mu) A_2(t) - \mu b^{-2} B_2(t) = \mu m b^{-2} \int_a^b x T_2(x, t) dx \quad (3.26)$$

A resolução simultânea de 3.24, 3.25 e 3.26, tiram-se os valores de $A_1(t)$, $A_2(t)$ e $B_2(t)$.

$$A_1(t) = \frac{\mu(b^2 - a^2)(a - a_0)}{ab^2(\lambda + 2\mu)} + \frac{\mu m}{b^2(\lambda + \mu)} \left[\int_0^a x T_1(x, t) dx + \int_a^b x T_2(x, t) dx \right] \quad (3.27)$$

$$A_2(t) = - \frac{\mu a(a - a_0)}{b^2(\lambda + 2\mu)} + \frac{\mu m}{b^2(\lambda + \mu)} \left[\int_0^a x T_1(x, t) dx + \int_a^b x T_2(x, t) dx \right] \quad (3.28)$$

$$B_2(t) = - \frac{a(\lambda + \mu)(a - a_0)}{\lambda + 2\mu} + m \int_0^a x T_1(x, t) dx \quad (3.29)$$

Substituindo 3.27 em 3.15, e 3.28 e 3.29 em 3.17, determinam-se as tensões:

Para $0 \leq r \leq a$

$$\sigma_{rr}(r, t) = 2 \left\{ \frac{\mu(\lambda + \mu)(b^2 - a^2)(a - a_0)}{ab^2(\lambda + 2\mu)} + \frac{\mu m}{b^2} \left[\int_0^a x T_1(x, t) dx + \int_a^b x T_2(x, t) dx \right] - \frac{\mu m}{r^2} \int_0^r x T_1(x, t) dx \right\} \quad (3.30)$$

Para $a \leq r \leq b$

$$\sigma_{rr}(r, t) = 2 \left\{ \frac{\mu(\lambda + \mu)a(b^2 - r^2)(a - a_0)}{(\lambda + 2\mu)b^2 r^2} + \frac{\mu m}{b^2} \left[\int_0^a x T_1(x, t) dx + \int_a^b x T_2(x, t) dx \right] - \right.$$

$$- \frac{\mu m}{r^2} \left[\int_0^a x T_1(x, t) dx + \int_a^r x T_2(x, t) dx \right] \quad (3.31)$$

Fazendo $r \rightarrow a$ na expressão 3.30 ou 3.31, tem-se a tensão na interface:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(a, t) = & \frac{2 \mu (\lambda + \mu) (b^2 - a^2)}{(\lambda + 2\mu) a b^2} (a - a_0) - \\ & - \frac{2\mu m}{b^2} \left[\frac{b^2 - a^2}{a^2} \int_0^a x T_1(x, t) dx - \int_a^b x T_2(x, t) dx \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Da condição inicial no raio interno $\sigma_{rr}(a, 0) = 0$ determina-se a imposição que deve satisfazer os raios externo e interno na interface dos cilindros, isto é, determina-se $(a - a_0)$.

Com o valor de $(a - a_0)$ pode-se agora escrever a tensão normal na interface.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(a, t) = & \frac{2\mu m}{b^2} \left\{ \frac{b^2 - a^2}{a^2} \left[\int_0^a x T_1(x, 0) dx - \int_0^a x T_1(x, t) dx \right] - \right. \\ & \left. - \left[\int_a^b x T_2(x, 0) dx - \int_a^b x T_2(x, t) dx \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ou em função da relação dos raios, do módulo de elas-

tividade, do coeficiente de Poisson e do coeficiente de dilatação linear.

$$\sigma_{rr}(a,t) = \frac{Ea_t}{b(1-\nu)} \left\{ (\tau^2 - 1) \left[\int_0^a xT_1(x,0)dx - \int_0^a xT_1(x,t)dx \right] - \left[\int_a^b xT_2(x,0)dx - \int_a^b xT_2(x,t)dx \right] \right\} \quad (3.34)$$

Seja agora a tensão normal para um caso particular, que será usado mais tarde, de distribuições iniciais de temperatura:

$$T_1(r,0) = T_i \text{ (temperatura ambiente)} \quad (3.35)$$

$$T_2(r,0) = f(r) \quad (3.36)$$

Então chega-se em:

$$\sigma_{rr}(a,t) = \frac{Ea_t}{(1-\nu)b^2} \left\{ (\tau^2 - 1) \left[\frac{T_i a^2}{2} - \int_0^a xT_1(x,t)dx \right] - \left[\int_a^b xf(x)dx - \int_a^b xT_2(x,t)dx \right] \right\} \quad (3.37)$$

CAPÍTULO IV

CAMPOS TRANSIENTES DE TEMPERATURA EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

A determinação do campo transiente de temperatura gerado pela condução do calor em sólidos homogêneos, isotrópicos, sem acoplamento de temperatura com deformação, sem fonte interna de calor, em coordenadas cilíndricas no caso de simetria radial e na independência da coordenada z é dada pela resolução da equação 2.19.

4.1 - Resolução da Equação da Condução do Calor

Seja $T(r,t)$ solução da equação 2.19, admitindo-se que $T(r,t)$ e $\partial T/\partial t$ sejam contínuas para $0 \leq t \leq N$ e, de ordem exponencial para $t > N$ e que $\partial^2 T/\partial t^2$, seja seccionalmente contínua em $0 \leq t \leq N$ [7], então pode ser aplicada a transformação de Laplace nessa equação e definindo \bar{T} como a transformada de T , obtêm-se:

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{T}}{dr} - \frac{s}{\alpha} \bar{T} = - \frac{T(r,0)}{\alpha} \quad (4.1)$$

chamando $q = \left(\frac{s}{\alpha}\right)^{1/2}$, chega-se à equação diferencial:

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{T}}{dr} - q^2 \bar{T} = - \frac{T(r,0)}{\alpha} \quad (4.2)$$

Uma vez que a equação diferencial 4.2 é linear não homogênea, a solução será a soma da solução geral da homogênea com uma integral particular da não homogênea [8].

A equação homogênea é uma equação de Bessel modificada de ordem zero [3], [9] cuja solução é:

$$\bar{T}_h(r,s) = C I_0(qr) + D K_0(qr) \quad (4.3)$$

Pelo método da variação dos parâmetros determina-se uma integral particular de 4.2 [8], sob a forma:

$$\bar{T}_p(r,s) = \gamma_1(qr) I_0(qr) + \gamma_2(qr) K_0(qr) \quad (4.4)$$

com

$$\gamma_1(qr) = - \frac{1}{\alpha} \int_{\eta}^r x T(x,0) K_0(qx) dx \quad (4.5)$$

$$\gamma_2(qr) = \frac{1}{\alpha} \int_{\eta}^r x T(x,0) I_0(qx) dx \quad (4.6)$$

Então a solução geral é:

$$\bar{T}(r,s) = CI_0(qr) + DK_0(qr) + \gamma_1(qr)I_0(qr) + \gamma_2(qr)K_0(qr) \quad (4.7)$$

O valor de η será escolhido de acordo com a geometria do problema.

Tendo assim o valor da transformada da temperatura, facilmente determina-se a temperatura pela fórmula de inversão.

4.2 - Campo de Temperatura em Cilindro Circular Oco

Tomando-se o cilindro circular oco de raios a e b interno e externo respectivamente, à temperatura ambiente T_i , e, se a partir de um determinado instante for mantida uma temperatura constante T_0 no contorno interno e, o contorno externo permanecer sempre à temperatura ambiente, surgirá um campo transiente de temperatura o qual será determinado a seguir (Figura 4.1).

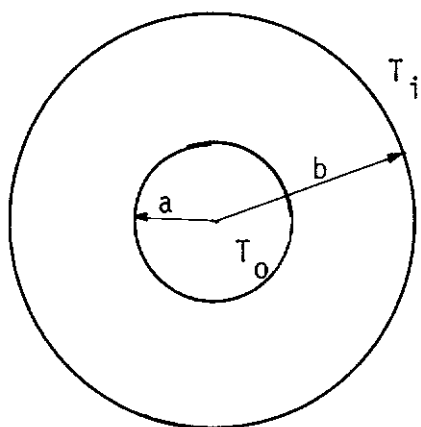


Fig. 4.1

Condições de Contorno

$$T(a, t) = T_0 \quad (4.8)$$

$$T(b, t) = T_i \quad (4.9)$$

Condição Inicial

$$T(r, 0) = T_i \quad (4.10)$$

Pela resolução da equação da condução do calor feita no Item 4.1, chegou-se na expressão da transformada da temperatura dada pela expressão 4.7. Uma vez que a temperatura inicial é constante, a integral particular, facilmente obtida, é

também, constante e igual a T_i/s , o que pode ser verificado pela substituição desse valor na equação 4.1. Então a solução geral será:

$$\bar{T}(r,s) = CI_0(qr) + DK_0(qr) + \frac{T_i}{s} \quad (4.11)$$

Aplicando-se a transformação de Laplace nas condições de contorno, chega-se a:

$$\bar{T}(a,s) = \frac{T_o}{s} \quad (4.12)$$

$$\bar{T}(b,s) = \frac{T_i}{s} \quad (4.13)$$

Pela substituição de 4.11 nas condições 4.12 e 4.13, tem-se o sistema linear em C e D.

$$I_0(qa) C + K_0(qa) D = \frac{T_o - T_i}{s} \quad (4.14)$$

$$I_0(qb) C + K_0(qb) D = 0$$

A solução do sistema 4.14 é [9], [10]:

$$C = \frac{K_0(qb)}{I_0(qa)K_0(qb) - I_0(qb)K_0(qa)} \frac{T_0 - T_i}{s} \quad (4.15)$$

$$D = \frac{-I_0(qb)}{I_0(qa)K_0(qb) - I_0(qb)K_0(qa)} \frac{T_0 - T_i}{s} \quad (4.16)$$

Substituindo os valores de C e D, dados pelas expressões 4.15 e 4.16 respectivamente, em 4.11, tem-se a transformação da temperatura:

$$\bar{T}(r,s) = (T_0 - T_i) \frac{K_0(qb)I_0(qr) - I_0(qb)K_0(qr)}{s[I_0(qa)K_0(qb) - I_0(qb)K_0(qa)]} + \frac{T_i}{s} \quad (4.17)$$

O valor da temperatura é obtida pelo cálculo da inversa de 4.17 dado pela fórmula A1.9 [7].

Ou seja:

$$T(r,t) = T_i + (T_0 - T_i) \frac{1}{2\pi i} \oint \bar{G}(s) e^{st} ds \quad (4.18)$$

onde

$$\bar{G}(s) = \frac{K_0(qb)I_0(qr) - I_0(qb)K_0(qr)}{s[I_0(qa)K_0(qb) - I_0(qb)K_0(qa)]} \quad (4.19)$$

Singularidades de $\bar{G}(s)e^{st}$

A função $q = (\frac{s}{\alpha})^{1/2}$ é uma função plurívoca com dois ramos, então seja, $q = pe^{\pm i\pi/2}$ [11], [12].

Substituindo esses valores de q em $\bar{G}(s)e^{st}$, tem-se:

$$\bar{G}(pe^{\pm i\pi/2}) e^{-p^2 \alpha t} = \quad (4.20)$$

$$= \frac{K_0(pbe^{\pm i\pi/2})I_0(pre^{\pm i\pi/2}) - I_0(pbe^{\pm i\pi/2})K_0(pre^{\pm i\pi/2})}{-p^2 \alpha [I_0(pae^{\pm i\pi/2})K_0(pbe^{\pm i\pi/2}) - I_0(pbe^{\pm i\pi/2})K_0(pae^{\pm i\pi/2})]} e^{-p^2 \alpha t}$$

Através das fórmulas A2.14 e A2.15 [3], [9], e, fazendo uma série de passagens algébricas, obtêm-se a expressão:

$$\bar{G}(pe^{\pm i\pi/2}) e^{-p^2 \alpha t} =$$

$$= \frac{Y_0(pb)J_0(pr) - J_0(pb)Y_0(pr)}{-p^2 \alpha [J_0(pa)Y_0(pb) - J_0(pb)Y_0(pa)]} e^{-p^2 \alpha t} \quad (4.21)$$

Isto indica que $\bar{G}(s)e^{st}$ é função unívoca apesar de q ser plurívoca.

Pólos de $\bar{G}(s)$

Os pólos são dados através da equação:

$$s[I_0(qa)K_0(qb) - I_0(qb)K_0(qa)] = 0 \quad (4.22)$$

Onde $s = 0$ é um pólo, os demais são soluções da equação transcendental dada a seguir:

$$I_0(qa)K_0(qb) - I_0(qb)K_0(qa) = 0 \quad (4.23)$$

Tomando $q = (\frac{s}{\alpha})^{1/2} = \frac{\lambda}{a} e^{i\pi/2}$, o que implica que $s = -\frac{\alpha}{a^2} \lambda^2$ e, fazendo uso das fórmulas A2.14 e A2.15 [3], [9], a equação 4.23 se transforma em:

$$J_0(\lambda)Y_0(\tau\lambda) - J_0(\tau\lambda)Y_0(\lambda) = 0 \quad (4.24)$$

Tal equação tem infinitas raízes reais, λ_n , dadas na Tab. A3.1 [4].

Consequentemente $s_n = -\frac{\alpha}{a^2} \lambda_n^2$ são os demais pólos de $\bar{G}(s)$, os quais são sempre negativos.

Uma vez que as únicas singularidades do integrando

são pólos, a inversa é dada pela soma dos resíduos [3], [7].

Como o integrando é da forma $\frac{P(s)}{s Q(s)}$, a inversa é dada pela fórmula A1.14, [3].

O resíduo para $s = 0$ é:

$$\text{Res}(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s [K_0(qb)I_0(qr) - I_0(qb)K_0(qr)] e^{st}}{s [K_0(qb)I_0(qa) - I_0(qb)K_0(qa)]} \quad (4.25)$$

Fazendo uso de A2.18 e A2.20 [3], [9], tem-se:

$$\text{Res}(0) = \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \tau} \quad (4.26)$$

Os demais resíduos são dados pela fórmula:

$$\text{Res}(s_n) = \frac{P(s_n)}{s_n \left(\frac{dQ}{ds} \right)_{s=s_n}} \quad (4.27)$$

Usando as expressões A2.14 e A2.15 [3], [9] chega-se

em:

$$p(s_n) = -\frac{\pi}{2} [Y_0(\tau\lambda_n)J_0\left(\frac{\lambda_n}{a}r\right) - J_0(\tau\lambda_n)Y_0\left(\frac{\lambda_n}{a}r\right)] e^{-\alpha/a^2\lambda_n^2 t} \quad (4.28)$$

Efetuada-se a derivação $(\frac{dQ}{ds})_{s=s_n}$ e, usando as expressões A2.7, A2.8, A2.14 e A2.15 [3], [9], então obtêm-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dQ}{ds}\right)_{s=s_n} = & \left\{ a[J_1(\lambda_n)Y_0(\tau\lambda_n) - J_0(\tau\lambda_n)Y_1(\lambda_n)] + b[J_0(\lambda_n)Y_1(\tau\lambda_n) - \right. \\ & \left. - J_1(\tau\lambda_n)Y_0(\lambda_n)] \right\} \frac{a}{2\alpha\lambda_n} \left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Fazendo uso da equação dos pólos 4.24 e da A2.16 [9], a expressão 4.29 se transforma em:

$$\left(\frac{dQ}{ds}\right)_{s=s_n} = -\frac{\pi}{2} \frac{a^2}{\pi\alpha\lambda_n^2} \frac{J_0^2(\tau\lambda_n) - J_0^2(\lambda_n)}{J_0(\lambda_n)J_0(\tau\lambda_n)} \quad (4.30)$$

Consequentemente o resíduo para $s = s_n$, é:

$$\begin{aligned} \text{Res}(s_n) = & \quad (4.31) \\ = \pi \frac{J_0(\lambda_n)J_0(\tau\lambda_n)[Y_0(\tau\lambda_n)J_0(\lambda_n/a r) - J_0(\tau\lambda_n)Y_0(\lambda_n/a r)] e^{-\alpha/a^2\lambda_n^2 t}}{J_0^2(\tau\lambda_n) - J_0^2(\lambda_n)} \end{aligned}$$

Então a expressão da temperatura será:

$$T(r,t) = T_i + (T_o - T_i) \frac{\ln \frac{b}{r}}{\ln \tau} - \pi(T_o - T_i) \cdot \quad (4.32)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n) J_0(\tau \lambda_n) [Y_0(\tau \lambda_n) J_0(\lambda_n/a \ r) - J_0(\tau \lambda_n) Y_0(\lambda_n/a \ r)] e^{-\alpha/a^2 \lambda_n^2 t}}{J_0^2(\tau \lambda_n) - J_0^2(\lambda_n)}$$

4.3 - Campo de Temperatura em Dois Cilindros Circulares de Mesmo Material em Íntimo Contato.

Os dois cilindros circulares de mesmo material, sendo que o maciço tem raio a e o oco raios a e b , interno e externo respectivamente, estão em íntimo contato (Fig. 4.2). O cilindro maciço apresenta inicialmente uma distribuição constante de temperatura, T_i enquanto o oco uma distribuição $f(r)$ definida adiante. É suposto também que a superfície externa do cilindro oco tenha temperatura ambiente T_i . Com essas considerações passa-se a determinar o campo transiente de temperatura resultante.

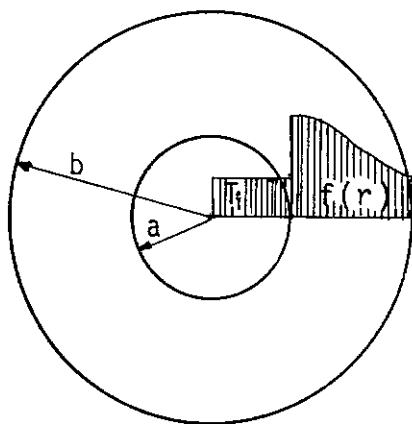


Fig. 4.2

Condições na interface

$$\left(\frac{\partial T_1}{\partial r}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial T_2}{\partial r}\right)_{r=a} \quad t > 0 \quad (4.33)$$

$$T_1(a, t) = T_2(a, t) \quad t > 0 \quad (4.34)$$

A condição 4.33 relata que o fluxo de calor que atravessa a interface se faz na direção normal, uma vez que se tem o mesmo material e um perfeito contato térmico [3], [4].

A condição 4.34 indica a continuidade da temperatura na interface [3], [4].

Condição no contorno externo

$$T_2(b, t) = T_i \quad t > 0 \quad (4.35)$$

Condição inicial

$$T_1(r, 0) = T_i \quad \text{para } 0 \leq r \leq a \quad (4.36)$$

$$T_2(r, 0) = f(r) \quad \text{para } a \leq r \leq b \quad (4.37)$$

A função $f(r)$ será dada pela expressão 4.32 para um instante $t = t_0$, isto é:

$$f(r) = M_1 - M_2 \ln r - M_3 \sum_{n=1}^{\infty} M_4 \left[Y_0(\tau \lambda_n) J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right) - J_0(\tau \lambda_n) Y_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right) \right] \quad (4.38)$$

onde

$$M_1 = T_i + (T_o - T_i) \frac{\ln b}{\ln \tau}$$

$$M_2 = \frac{T_o - T_i}{\ln \tau} \quad (4.39)$$

$$M_3 = \pi (T_o - T_i)$$

$$M_4 = \frac{J_0(\tau \lambda_n) J_0(\lambda_n)}{J_0^2(\tau \lambda_n) - J_0^2(\lambda_n)} e^{-\alpha/a^2 \lambda_n^2 t_0}$$

O problema que está sendo analisado é interpretado da seguinte maneira:

Inicialmente toma-se um cilindro, de raios a e b interno e externo respectivamente, à temperatura ambiente T_i , aplica-se uma temperatura T_0 constante no contorno interno durante um intervalo de tempo $t = t_0$, com isso a distribuição de temperatura será dada pela 4.32. Agora introduz-se um cilindro, à temperatura ambiente, de raio a , conseqüentemente surgirá um transiente de temperatura que tenderá à temperatura ambiente.

Note que tudo se passa como se fosse o cálculo da distribuição de temperatura em um único cilindro de raio b , com a condição de contorno 4.35 e condição inicial 4.36 e 4.37.

Então a expressão da temperatura para $t > 0$ na região $0 \leq r \leq a$ estendida na região $a \leq r \leq b$, descreve o campo de temperatura nessa região. Isto quer significar que se pode apenas determinar a expressão da temperatura para a primeira região, e, estendê-la para a segunda, evidentemente, porque ambas as regiões são de mesmo material em íntimo contato. O livro "Boundary Value Problems of Heat Conduction" [4], na página 296, apresenta a distribuição de temperatura para as duas

regiões feita pelo processo de separação de variáveis para materiais diferentes, e, pode-se observar que quando os materiais são os mesmos as expressões das temperaturas são iguais.

Pela expressão 4.7 obtêm-se as fórmulas:

$$\bar{T}(r,s) = C_1 I_0(qr) + \frac{T_i}{s} \quad \text{para} \quad 0 \leq r \leq a \quad (4.40)$$

Essa expressão não envolve $K_0(qr)$, pois deve ser limitada para $r \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \bar{T}(r,s) = & C_2 I_0(qr) + D_2 K_0(qr) + \gamma_1(qr) I_0(qr) + \gamma_2(qr) K_0(qr) \\ & \text{para} \quad a \leq r \leq b \end{aligned} \quad (4.41)$$

As expressões de $\gamma_1(qr)$ e $\gamma_2(qr)$ são tiradas de 4.5 e 4.6 fazendo $\eta = a$.

$$\gamma_1(qr) = - \frac{1}{\alpha} \int_a^r x f(x) K_0(qx) dx \quad (4.42)$$

$$\gamma_2(qr) = \frac{1}{\alpha} \int_a^r x f(x) I_0(qx) dx \quad (4.43)$$

Aplicando a transformação de Laplace nas condições de contorno vem:

$$\left(\frac{d}{dr} T_1(r,s)\right)_{r=a} = \left(\frac{d}{dr} \bar{T}_2(r,s)\right)_{r=a} \quad t > 0 \quad (4.44)$$

$$\bar{T}_1(a,s) = \bar{T}_2(a,s) \quad t > 0 \quad (4.45)$$

$$\bar{T}_2(b,s) = \frac{T_i}{s} \quad t > 0 \quad (4.46)$$

Substituindo 4.40 e 4.41 em 4.44, 4.45 e 4.46 e, fazendo uso de A2.7 e A2.8 [3], [9], chega-se em:

$$I_1(qa) C_1 - I_1(qa) C_2 + K_1(qa) D_2 = 0$$

$$I_0(qa) C_1 - I_0(qa) C_2 - K_0(qa) D_2 = -\frac{T_i}{s} \quad (4.47)$$

$$I_0(qb) C_2 + K_0(qb) D_2 = -\gamma_1(qb) I_0(qb) - \gamma_2(qb) K_0(qb) + \frac{T_i}{s}$$

Resolvendo o sistema 4.47 e usando a igualdade A2.17 [9], obtêm-se:

$$C_1 = \frac{T_i}{s I_0(qb)} - \frac{T_i a q}{s I_0(qb)} [I_0(qb)K_1(qa) + I_1(qa)K_0(qb)] - \frac{\gamma_1(qb)I_0(qb) + \gamma_2(qb)K_0(qb)}{I_0(qb)} \quad (4.48)$$

$$C_2 = \frac{T_i}{s I_0(qb)} - \frac{T_i a q}{s I_0(qb)} I_1(qa) K_0(qb) - \frac{\gamma_1(qb)I_0(qb) + \gamma_2(qb)K_0(qb)}{I_0(qb)} \quad (4.49)$$

$$D_2 = - \frac{T_i a q}{s} I_1(qa) \quad (4.50)$$

Então substituindo 4.48 em 4.40, tem-se para $0 \leq r \leq a$

$$\begin{aligned} \bar{T}_1(r, s) = & \frac{T_i I_0(qr)}{s I_0(qb)} - \frac{T_i a q [I_0(qb)K_1(qa) + I_1(qa)K_0(qb)] I_0(qr)}{s I_0(qb)} + \frac{T_i}{s} \\ & + [I_0(qb) \int_a^b x f(x) K_0(qx) dx - K_0(qb) \int_a^b x f(x) I_0(qx) dx] \frac{I_0(qr)}{\alpha I_0(qb)} \quad (4.51) \end{aligned}$$

A expressão da transformada para a região $a \leq r \leq b$ não é necessária pois a fórmula de $T_1(r,t)$ tirada de 4.51, pela inversão, será válida para toda a região, $0 \leq r \leq b$ [4].

O cálculo do campo de temperatura resume-se na determinação da inversa de 4.51.

Seguem-se os cálculos das integrais que a expressão 4.51 apresenta.

$$\underline{\text{Cálculo de } \int_a^b x f(x) K_0(qx) dx}$$

Uma vez que $f(x)$ é dada pela 4.38, e que a série que aparece nessa função é uniformemente convergente [10], pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \int_a^b x f(x) K_0(qx) dx &= M_1 \int_a^b x K_0(qx) dx - M_2 \int_a^b x \ln x K_0(qx) dx - \\ &- M_3 \sum_{n=1}^{\infty} M_4 [Y_0(\tau \lambda_n) \int_a^b x J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} x\right) K_0(qx) dx - J_0(\tau \lambda_n) \int_a^b x Y_0\left(\frac{\lambda_n}{a} x\right) K_0(qx) dx] \end{aligned} \quad (4.52)$$

Usando as fórmulas A2.23, A2.24 e A2.26 [9], chega-se a:

$$\begin{aligned}
& \int_a^b x f(x) K_0(qx) dx = - \frac{M_1}{q} [b K_1(qb) - a K_1(qa)] + \\
& + \frac{M_2}{q} [b \ell n b K_1(qb) - a \ell n a K_1(qa)] + \frac{M_2}{q^2} [K_0(qb) - K_0(qa)] - \\
& - M_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_4}{\lambda_n^2 / a^2 + q^2} \left\{ [J_1(\tau \lambda_n) Y_0(\tau \lambda_n) - J_0(\tau \lambda_n) Y_1(\tau \lambda_n)] \tau \lambda_n K_0(qb) - \right. \\
& - [J_1(\lambda_n) Y_0(\tau \lambda_n) - J_0(\tau \lambda_n) Y_1(\lambda_n)] \lambda_n K_0(qa) + \\
& \left. + [J_0(\lambda_n) Y_0(\tau \lambda_n) - J_0(\tau \lambda_n) Y_0(\lambda_n)] a q K_1(qa) \right\} \quad (4.53)
\end{aligned}$$

Fazendo uso da equação dos pólos 4.24 e da igualdade A2.16 [9], tem-se o valor da integral.

$$\begin{aligned}
& \int_a^b x f(x) K_0(qx) dx = - \frac{M_1}{q} [b K_1(qb) - a K_1(qa)] + \\
& + \frac{M_2}{q} [b \ell n b K_1(qb) - a \ell n a K_1(qa)] + \frac{M_2}{q^2} [K_0(qb) - K_0(qa)] - \\
& - M_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_4}{\lambda_n^2 / a^2 + q^2} \frac{2}{\pi} \frac{J_0(\lambda_n) K_0(qb) - J_0(\tau \lambda_n) K_0(qa)}{J_0(\lambda_n)} \quad (4.54)
\end{aligned}$$

Cálculo de $\int_a^b xf(x)I_0(qx)dx$

Por raciocínio análogo ao cálculo da integral 4.54, chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_a^b xf(x)I_0(qx)dx &= \frac{M_1}{q} [bI_1(qb) - aI_1(qa)] - \\ &- \frac{M_2}{q} [b \ln b I_1(qb) - a \ln a I_1(qa)] + \frac{M_2}{q^2} [I_0(qb) - I_0(qa)] - \\ &- M_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_4}{\lambda_n^2/a^2 + q^2} \frac{2}{\pi} \frac{J_0(\lambda_n)I_0(qb) - J_0(\tau\lambda_n)I_0(qa)}{J_0(\lambda_n)} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Substituindo 4.54 e 4.55 em 4.51 e, utilizando as 4.39, obtêm-se o valor da transformada da temperatura:

$$\begin{aligned} \bar{T}_1(r,s) &= \frac{T_i}{s} + (T_0 - T_i) \frac{aq [I_0(qb)K_1(qa) + I_1(qa)K_0(qb)] I_0(qr)}{s I_0(qb)} + \\ &+ \left(\frac{T_0 - T_i}{\ell \pi \tau} \right) \frac{[I_0(qa)K_0(qb) - K_0(qa)I_0(qb)] I_0(qr)}{s I_0(qb)} - \\ &- \frac{2(T_0 - T_i)}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\tau\lambda_n) e^{-\alpha/a^2 \lambda_n^2 t_0}}{J_0^2(\tau\lambda_n) - J_0^2(\lambda_n)} \frac{[I_0(qa)K_0(qb) - K_0(qa)I_0(qb)] I_0(qr)}{(\lambda_n^2/a^2 + q^2) I_0(qb)} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Passa-se agora ao cálculo da inversa.

A temperatura será dada pela expressão abaixo uma vez que a série apresentada em 4.56 é uma série uniformemente convergente [10].

$$T(r,t) = T_i + (T_o - T_i) \frac{1}{2\pi i} \oint \bar{G}_1(s) e^{st} ds + \frac{(T_o - T_i)}{\ln \tau} \frac{1}{2\pi i} \oint \bar{G}_2(s) e^{st} ds - \frac{2(T_o - T_i)}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\tau \lambda_n) e^{-\alpha/a^2 \lambda_n^2 t}}{J_0^2(\tau \lambda_n) - J_0^2(\lambda_n)} \frac{1}{2\pi i} \oint \bar{G}_3(s) e^{st} ds \quad (4.57)$$

onde

$$\bar{G}_1(s) = \frac{aq [I_0(qb)K_1(qa) + I_1(qa)K_0(qb)] I_0(qr)}{s I_0(qb)} \quad (4.58)$$

$$\bar{G}_2(s) = \frac{[I_0(qa)K_0(qb) - K_0(qa)I_0(qb)] I_0(qr)}{s I_0(qb)} \quad (4.59)$$

$$\bar{G}_3(s) = \frac{[I_0(qa)K_0(qb) - K_0(qa)I_0(qb)] I_0(qr)}{(\lambda_n^2/a^2 + q^2) I_0(qb)} \quad (4.60)$$

Por raciocínio análogo à obtenção das singularidades da expressão $\bar{G}(s)e^{st}$ do item 4.2, demonstra-se que as únicas

singularidades de $\bar{G}_1(s)e^{st}$, $\bar{G}_2(s)e^{st}$ e $\bar{G}_3(s)e^{st}$, são apenas pólos.

Pólos de $\bar{G}_1(s)$, $\bar{G}_2(s)$ e $\bar{G}_3(s)$

Todas as três funções apresentam pólos dados pela expressão:

$$s \quad I_0(qb) = 0 \quad (4.61)$$

Note-se que $\lambda_n^2/a^2 + q^2 = 0$, não constitui pólos pois o numerador se anula também para esses valores de q e que essa indeterminação apresenta limite finito.

Então pela 4.61 $s=0$ é um pólo, os demais são obtidos fazendo $q = (s/\alpha)^{1/2} = \delta/a \ e^{i\pi/2}$ nessa expressão, conduzindo assim a equação abaixo.

$$J_0(\tau\delta) = 0 \quad (4.62)$$

Tal equação apresenta infinitas raízes reais, δ_m cujas cinco primeiras estão na Tab. A3.2 [4], correspondentemente os pólos são $s_m = -\alpha/a^2 \delta_m^2$, todos negativos.

As transformadas inversas são obtidas seguindo técnica idêntica à usada no item 4.2, obtêm-se então:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \bar{G}_1(s) e^{st} ds = 1 - \frac{\pi}{\tau} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(\delta_m) Y_0(\tau \delta_m) J_0(\delta_m/a r)}{J_1(\tau \delta_m)} e^{-\alpha/a^2 \delta_m^2 t} \quad (4.63)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \bar{G}_2(s) e^{st} ds = \quad (4.64)$$

$$= -\ln \tau + \frac{\pi}{\tau} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\delta_m) Y_0(\tau \delta_m) J_0(\delta_m/a r)}{\delta_m J_1(\tau \delta_m)} e^{-\alpha/a^2 \delta_m^2 t}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \bar{G}_3(s) e^{st} ds =$$

$$= -\frac{\alpha \pi}{\tau} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_m J_0(\delta_m) Y_0(\tau \delta_m) J_0(\delta_m/a r)}{(\lambda_n^2 - \delta_m^2) J_1(\tau \delta_m)} e^{-\alpha/a^2 \delta_m^2 t} \quad (4.65)$$

Substituindo 4.63, 4.64, 4.65 em 4.57, obtêm-se o campo de temperatura:

$$T(r, t) = T_i + (T_o - T_i) \frac{\pi}{\tau} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[-J_1(\delta_m) + \frac{J_0(\delta_m)}{\delta_m \ln \tau} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\tau \lambda_n) e^{-\alpha/a^2 \lambda_n^2 t_o}}{J_0^2(\tau \lambda_n) - J_0^2(\lambda_n)} \frac{\delta_m J_0(\delta_m)}{\lambda_n^2 - \delta_m^2} \right] \right\}. \quad (4.66)$$

$$\cdot \frac{Y_0(\tau\delta_m)J_0(\delta_m/a r)}{J_1(\tau\delta_m)} e^{-\alpha/a^2 \delta_m^2 t} \Bigg\}$$

Fazendo uso da igualdade A2.16 [9] e da equação dos pólos 4.62, a expressão 4.66 se transforma em:

$$\begin{aligned} T(r,t) = & T_i + (T_o - T_i) \frac{2}{\tau^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[-J_1(\delta_m) + \frac{J_0(\delta_m)}{\delta_m \ln \tau} + \right. \right. & (4.67) \\ & \left. \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\tau\lambda_n) e^{-\alpha/a^2 \lambda_n^2 t_o}}{J_0^2(\tau\lambda_n) - J_0^2(\lambda_n)} \frac{\delta_m J_0(\delta_m)}{\lambda_n^2 - \delta_m^2} \right] \frac{J_0(\delta_m/a r) e^{-\alpha/a^2 \delta_m^2 t}}{\delta_m J_1^2(\tau\delta_m)} \right\} \end{aligned}$$

CAPÍTULO V

DESLOCAMENTO NO RAO INTERNO DE UM CILINDRO CIRCULAR OCO QUE SE OBTÉM QUANDO SE APLICA UMA TEMPERATURA CONSTANTE NO CONTORNO INTERNO.

Aplicando-se uma temperatura constante no contorno interno de um cilindro circular oco, este apresentará uma distribuição transiente de temperatura dada pela expressão 4.32, conseqüentemente, surgirá um campo de deslocamento cujo valor do deslocamento para o raio interno será dado pela 3.13.

$$u_{rr} = a (1 + \nu) a_t \left[\frac{2}{a^2 (\tau^2 - 1)} \int_a^b x T(x, t) dx - T_i \right]$$

Para se determinar este deslocamento é necessário resolver a integral que aparece na expressão acima, onde $T(x, t)$ é representada pela série 4.32.

Admitindo-se convergência uniforme desta série [10], pode-se escrever:

$$\int_a^b x T(x, t) dx = M_1 \int_a^b x dx + M_2 \int_a^b x \ln x dx -$$

$$-M_3 \sum_{n=1}^{\infty} M_4 [Y_0(\tau\lambda_n) \int_a^b x J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} x\right) dx - J_0(\tau\lambda_n) \int_a^b x Y_0\left(\frac{\lambda_n}{a} x\right) dx] \quad (5.1)$$

Os valores de M_1 , M_2 , M_3 e M_4 , são dados pelas expressões 4.39.

Resolvendo-se cada uma dessas integrais, com a ajuda da fórmula A2.22, e com a substituição de M_1, M_2, M_3 e M_4 , obtêm-se:

$$\int_a^b x T(x, t) dx = a^2 \left[\frac{T_i \tau^2 - T_o}{2} + \frac{(T_o - T_i)(\tau^2 - 1)}{4 \ln \tau} - \pi(T_o - T_i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[J_0(\tau\lambda_n) J_0(\lambda_n)] e^{-\alpha/a^2 \lambda_n^2 t}}{J_0^2(\tau\lambda_n) - J_0^2(\lambda_n)} \frac{1}{\lambda_n} \right] \quad (5.2)$$

$$\cdot \left\{ -\tau [J_0(\tau\lambda_n) Y_1(\tau\lambda_n) - J_1(\tau\lambda_n) Y_0(\tau\lambda_n)] - [J_1(\lambda_n) Y_0(\tau\lambda_n) - J_0(\tau\lambda_n) Y_1(\lambda_n)] \right\}$$

Pelo uso da igualdade A2.16 [9], e da equação dos pólos 4.24, chega-se a:

$$\int_a^b x T(x, t) dx = a^2 \left\{ \frac{T_i \tau^2 - T_o}{2} + \frac{(T_o - T_i)(\tau^2 - 1)}{4 \ln \tau} + \right.$$

$$+ 2 (T_0 - T_i) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha/a^2 \lambda_n^2 t}}{\lambda_n^2 \left[1 + \frac{J_0(\lambda_n)}{J_0(\tau \lambda_n)} \right]} \right\} \quad (5.3)$$

Substituindo 5.3 em 3.13, tem-se a expressão do deslocamento no contorno $r = a$.

$$u_{rr}(a, t) = \frac{a(1+\nu)a_t(T_0 - T_i)}{\tau^2 - 1} \left[-1 + \frac{\tau^2 - 1}{2 \ln \tau} + 4U(a, t) \right] \quad (5.4)$$

onde

$$U(a, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha/a^2 \lambda_n^2 t}}{\lambda_n^2 \left[1 + \frac{J_0(\lambda_n)}{J_0(\tau \lambda_n)} \right]} \quad (5.5)$$

Através da fórmula 5.4, obtêm-se a figura 5.1 por intermédio do programa de computação 4.1, do apêndice IV. As curvas dessa figura representam gráficos do deslocamento no raio interno do cilindro em função do tempo, e para diversos valores da relação do raio externo pelo interno.

A figura 5.2, representa o deslocamento no raio interno do cilindro em função da relação dos raios, em regime permanente. Foi obtida através da expressão 5.4, fazendo a 5.5 igual a zero, pelo programa de computação 4.2, do apêndice IV.

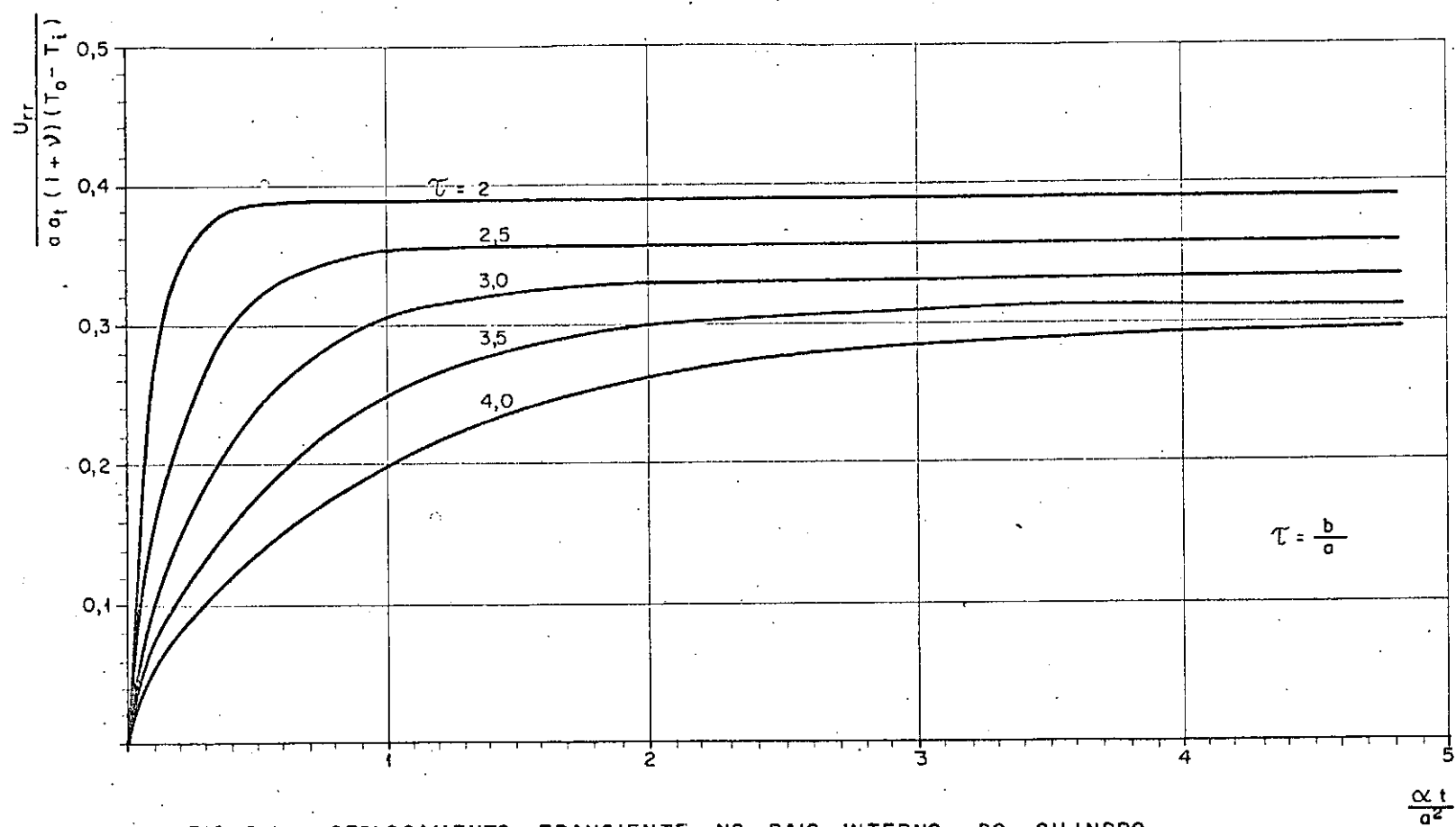


FIG. 5-1 - DESLOCAMENTO TRANSIENTE NO RAIO INTERNO DO CILINDRO

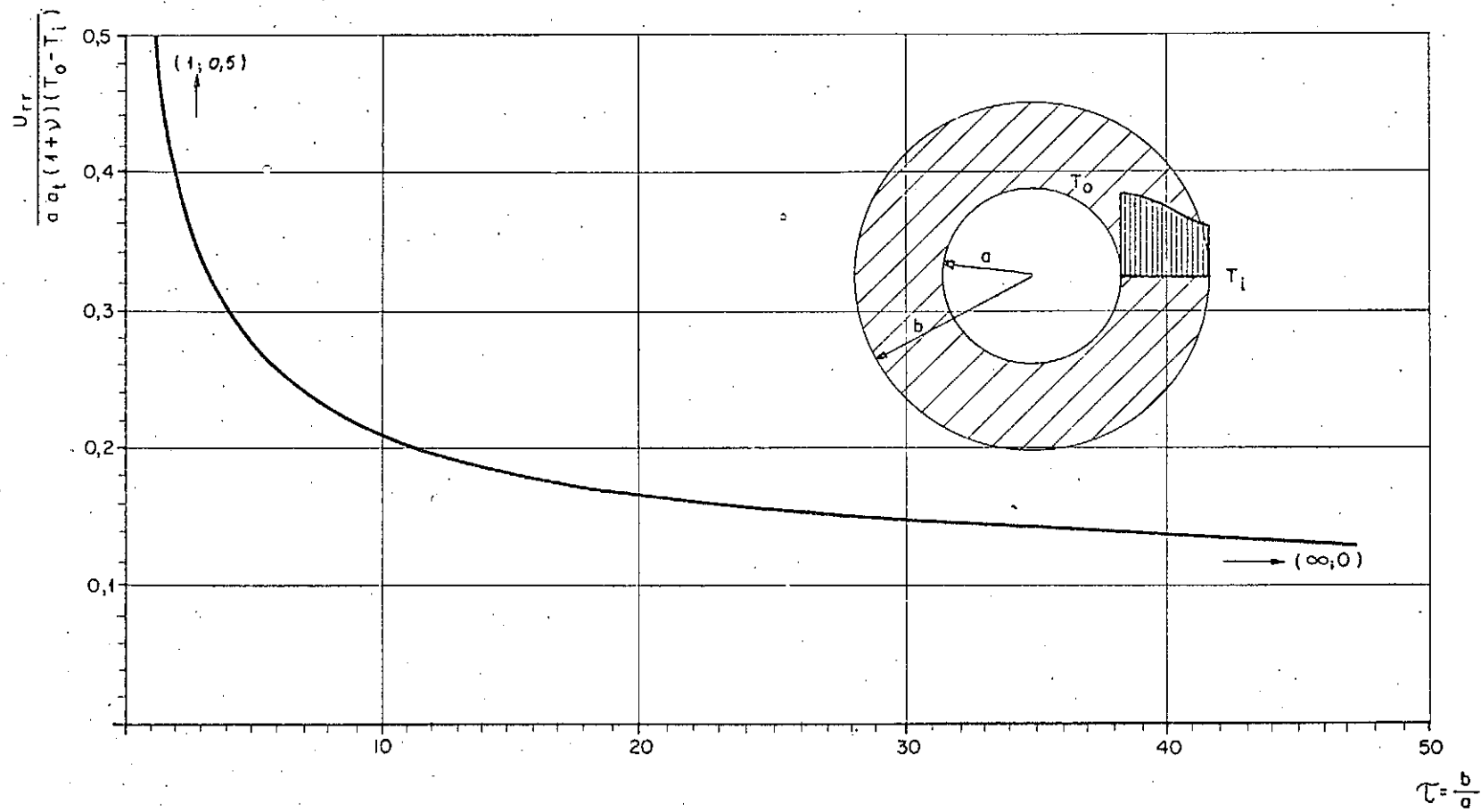


FIG. 5.2 - DESLOCAMENTO NO RAO INTERNO EM REGIME PERMANENTE

CAPÍTULO VI

TENSÃO NORMAL NA INTERFACE PRODUZIDA PELO ACOPLAMENTO DE DOIS CILINDROS CIRCULARES.

Tomando-se um cilindro oco de raios a e b interno e externo respectivamente, à temperatura ambiente e, aplicando-se uma temperatura constante, $T = T_0$ no contorno interno, surgirá um transiente de deslocamentos no raio interno dado pela 5.4. Se em um determinado instante $t = t_0$, a condição de contorno $T = T_0$ para $r = a$, for alterada para uma condição na interface, que se obtém pela introdução de um cilindro maciço à temperatura constante T_i , perfeitamente ajustado ao cilindro oco, surgirá um novo campo de temperatura que provocará tensões na interface $r = a$, dadas por 3.37.

6.1 - Determinação da Tensão Normal

As expressões da temperatura, para ambas as regiões, contidas na fórmula 3.37, são as mesmas e iguais a 4.67, em consequência do estudo feito no item 4.3, logo a 3.37 se transforma em:

$$\sigma_{rr}(a,t) = - \frac{Ea_t}{(1-\nu)b^2} \left\{ [(\tau^2-1)] \frac{T_i a^2}{2} - \right.$$

$$- \int_a^b x f(x) dx] - [\tau^2 \int_0^b x T(x, t) dx - \int_0^b x T(x, t) dx] \} \quad (6.1)$$

Onde $f(r)$ é dado pela expressão 4.32 para $t = t_0$, e, o valor de $\int_a^b x f(x) dx$ é dado pela 5.1, para $t = t_0$, e os demais termos devem ser calculados.

$$\text{Cálculo de } \int_0^\beta x T(x, t) dx, \quad (\beta = a, b)$$

Pela convergência uniforme de 4.67 [10], pode-se escrever:

$$\int_0^\beta x T(x, t) dx = \frac{T_i \beta^2}{2} + (T_0 - T_i) \frac{2}{\tau^2} \sum_{m=1}^{\infty} [S(a, t) \int_0^\beta x J_0\left(\frac{\delta_m}{a} x\right) dx] \cdot \frac{e^{-\alpha/a^2 \delta_m^2 t}}{\delta_m J_0^2(\tau \delta_m)} \quad (6.2)$$

onde:

$$S(a, t) = \left[-J_1(\delta_m) + \frac{J_0(\delta_m)}{\delta_m \ln \tau} + 2\delta_m J_0(\delta_m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\tau \lambda_n) e^{-\alpha/a^2 \lambda_n^2 t_0}}{J_0^2(\tau \lambda_n) - J_0^2(\lambda_n)} \frac{1}{\lambda_n^2 - \delta_m^2} \right] \quad (6.3)$$

Então com a ajuda da identidade A2.7 [3], [9], efetua-se a integral acima. Após efetuar esta operação e substituindo as expressões 6.2 com $\beta = a, b$, e, 5.1 em 6.1, e efetuando uma série de passagens algébricas chega-se na expressão da tensão normal.

$$\sigma_{rr}(a, t) = - \frac{E a_t (T_o - T_i)}{2(1-\nu) \tau^2} \left[-1 + \frac{\tau^2 - 1}{2 \ln \tau} + 4U(a, t_0) + \right. \\ \left. + \frac{4}{\tau} \sum_{m=1}^{\infty} S(a, t) \frac{\tau J_1(\delta_m) - J_1(\tau \delta_m)}{\delta_m^2 J_1^2(\tau \delta_m)} e^{-\alpha/a^2 \delta_m^2 t} \right] \quad (6.4)$$

Passa-se agora ao traçado dos gráficos.

As figuras 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, foram obtidas pelo programa de computação 4.3, do apêndice IV, pelo uso da expressão 6.4. Essas curvas representam a tensão normal na interface em função do tempo, para alguns valores de t_0 e τ .

A figura 6.6, corresponde a tensão normal na interface para regime permanente, no caso de $t_0 \rightarrow \infty$, em função de τ . Este gráfico foi feito com o uso da expressão 6.4, tomando-se apenas os dois primeiros termos entre colchetes cujo programa de computação é dado em 4.4, do apêndice IV.

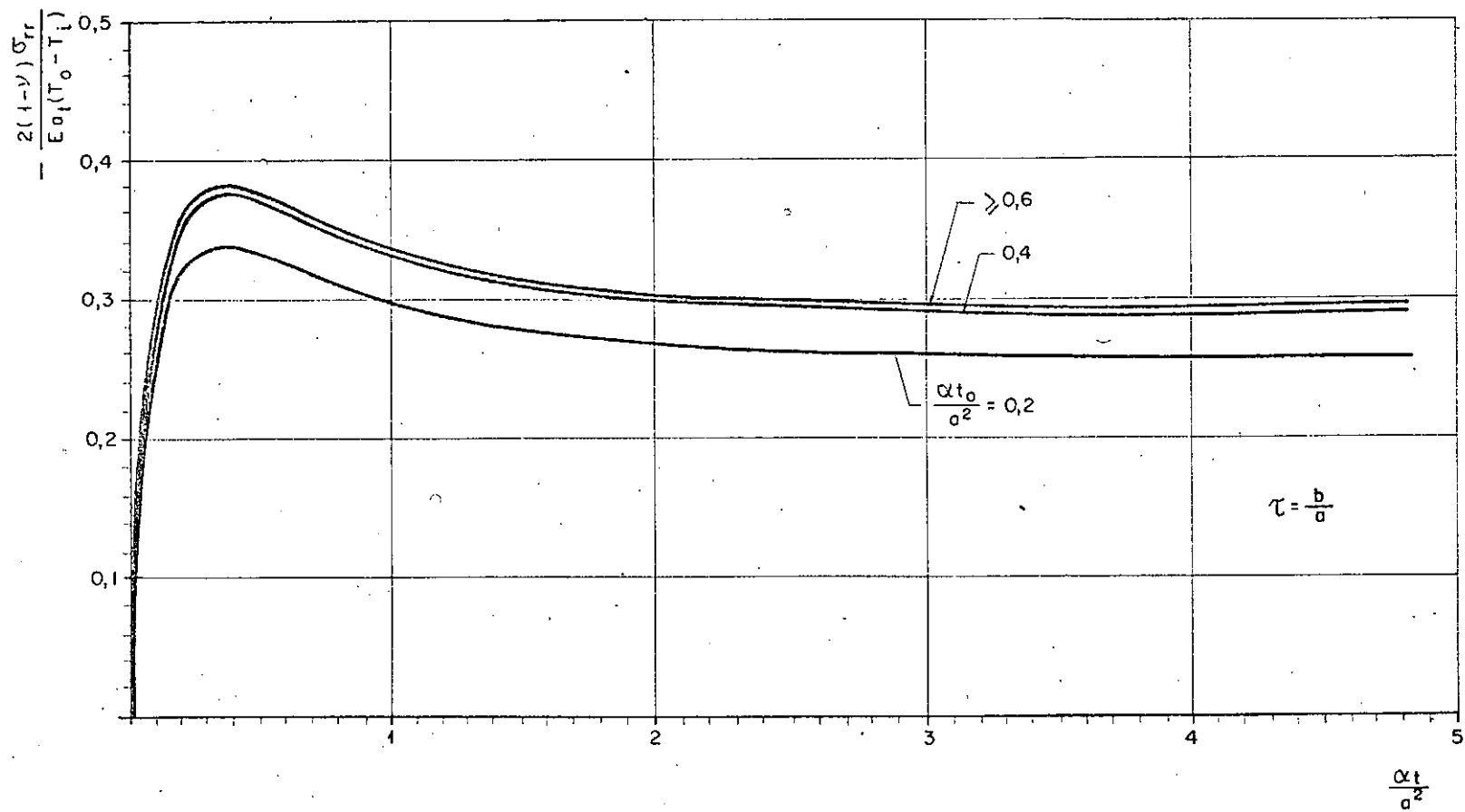


FIG. 6-1 - TENSÃO TRANSIENTE NA INTERFACE PARA $\tau = 2,0$

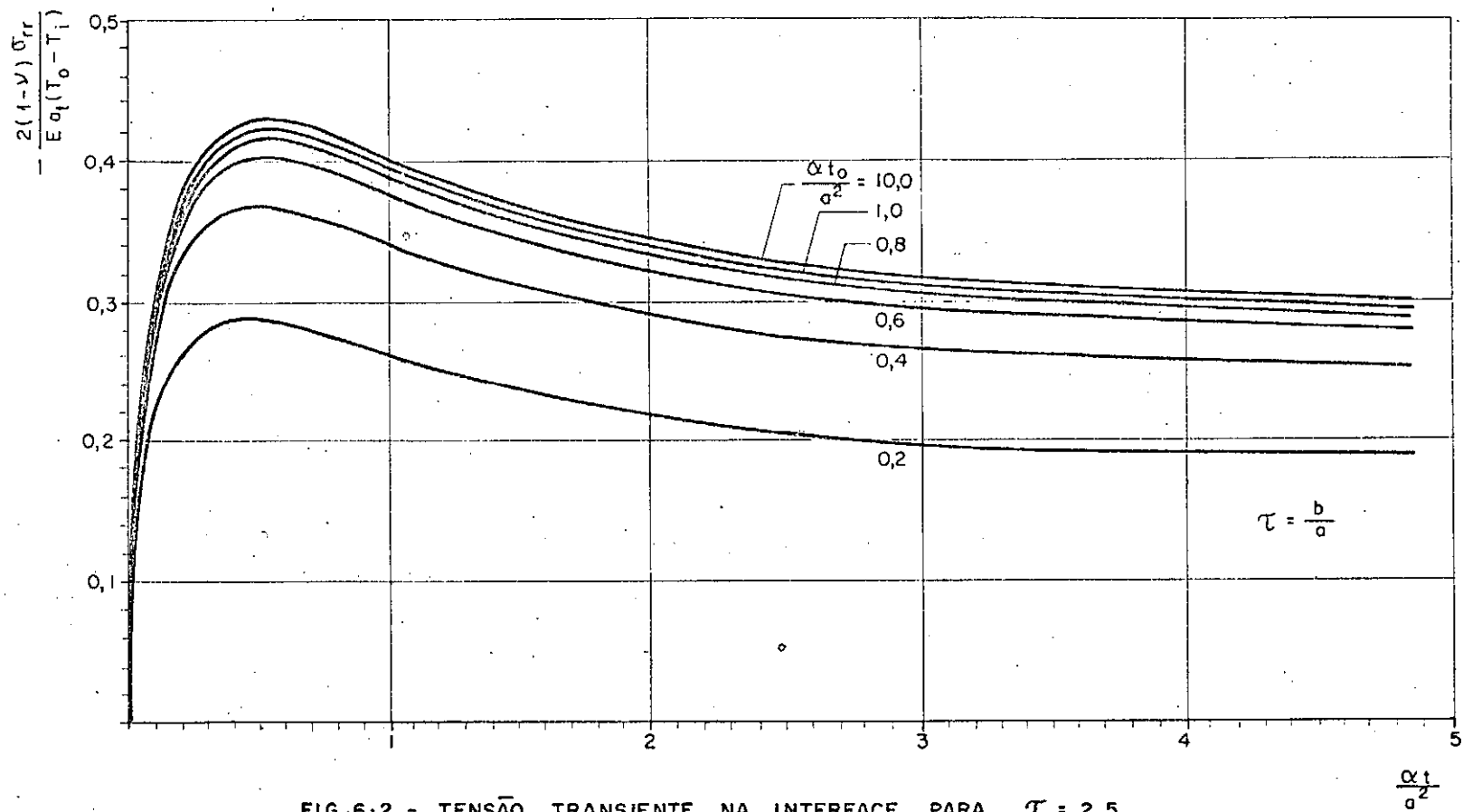


FIG.6.2 - TENSÃO TRANSIENTE NA INTERFACE PARA $\tau = 2,5$

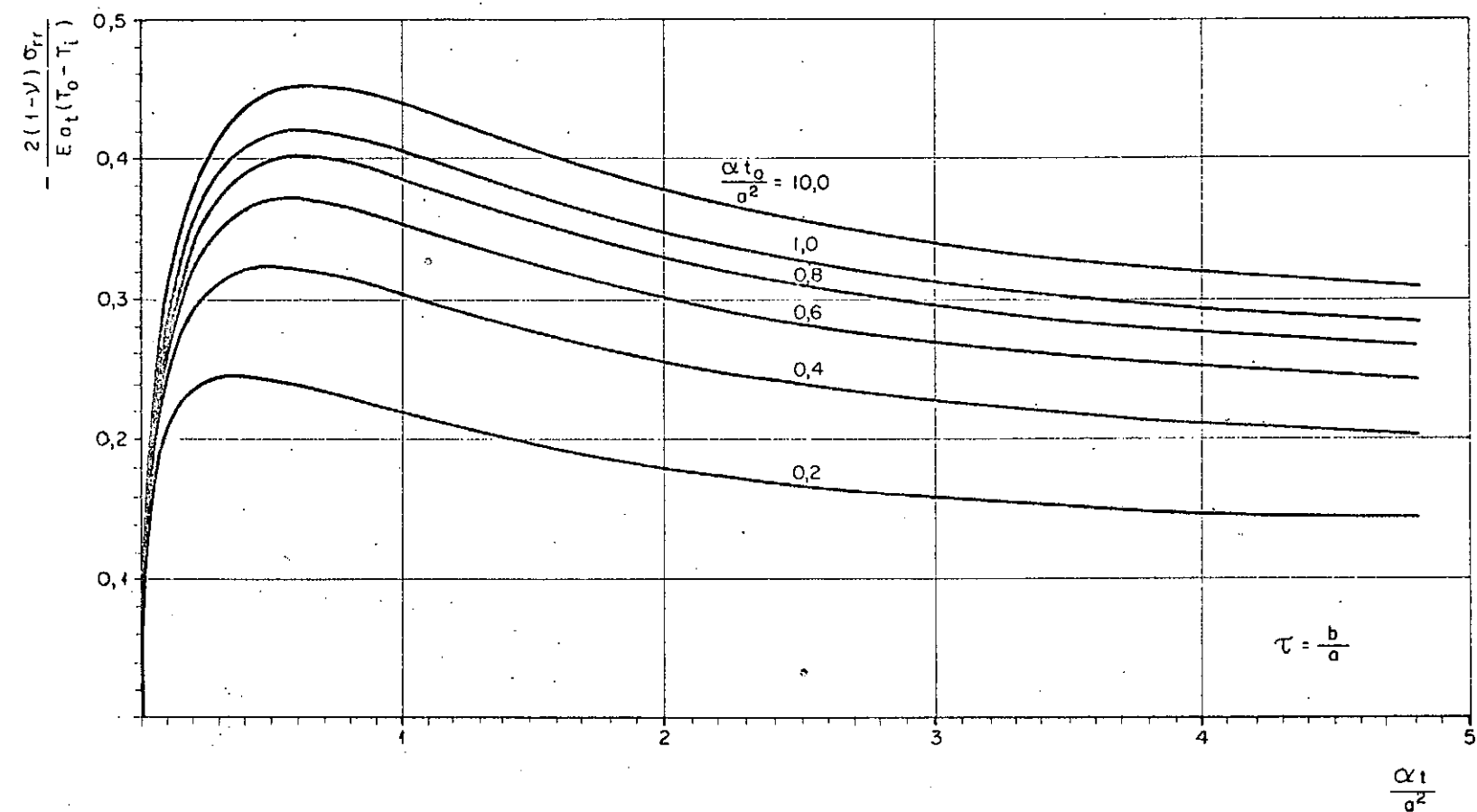


FIG. 6-3 - TENSÃO TRANSIENTE NA INTERFACE PARA $\tau = 3,0$

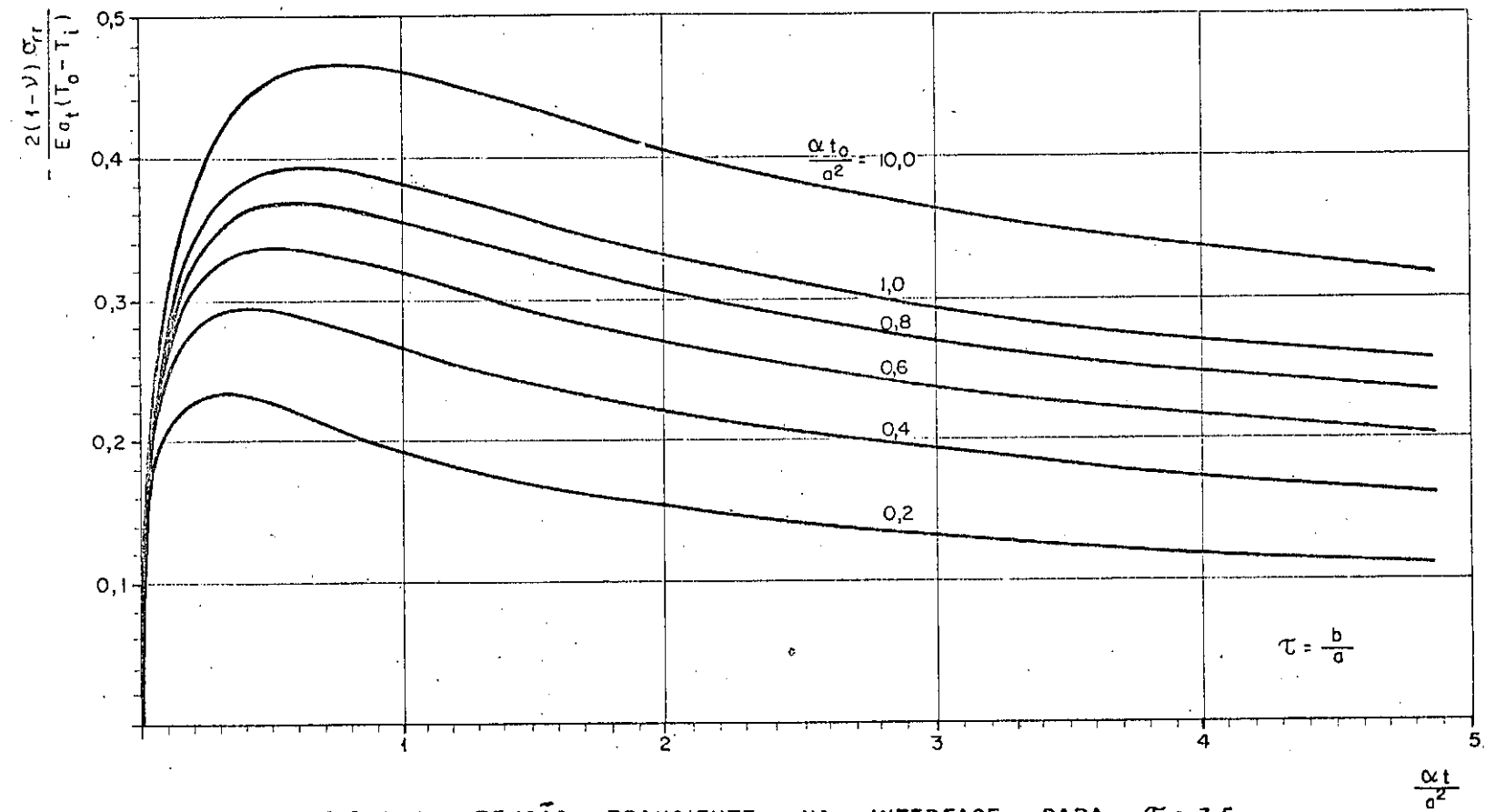


FIG. 6.4 - TENSÃO TRANSIENTE NA INTERFACE PARA $\tau = 3,5$

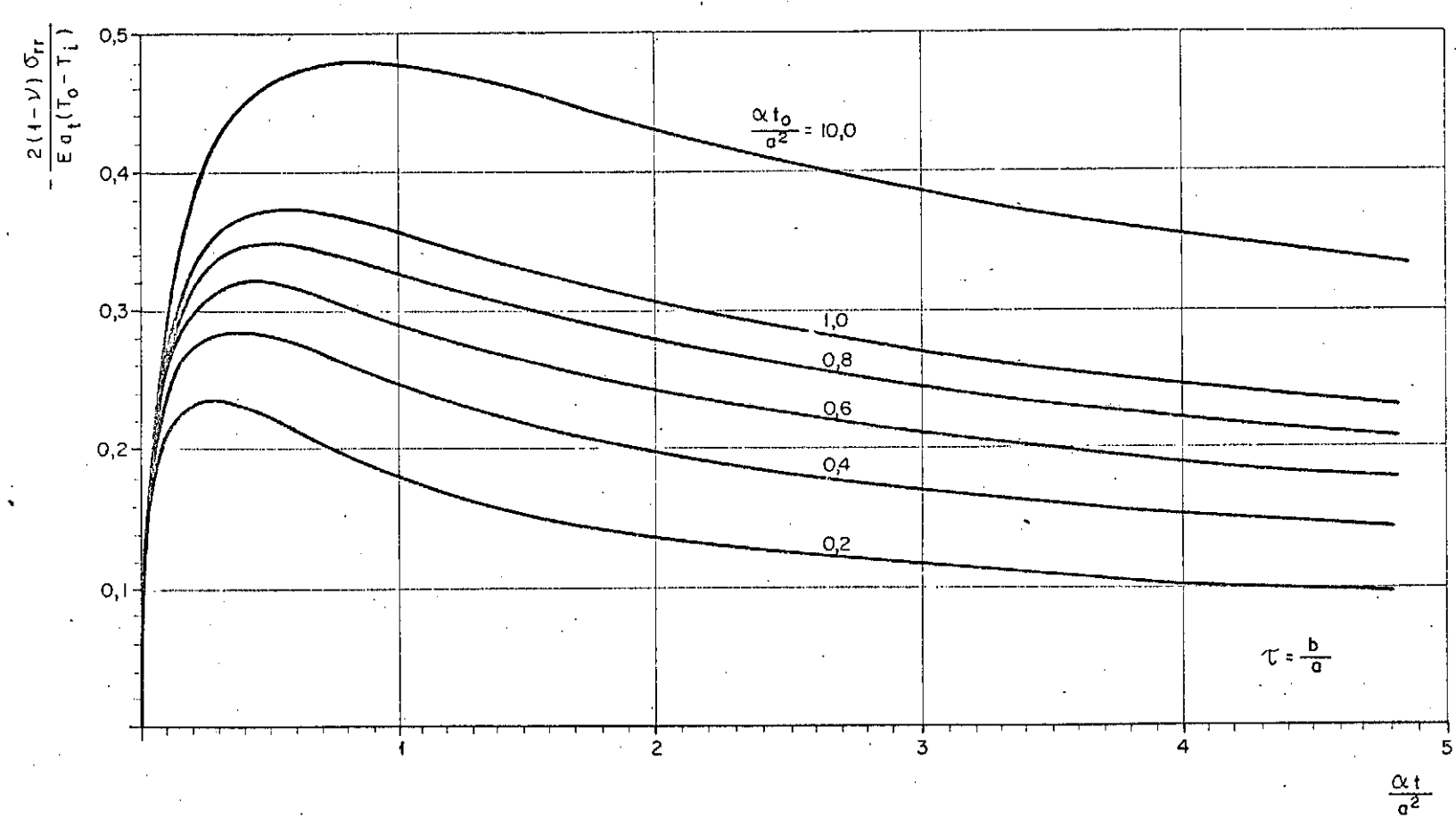


FIG. 6.5 - TENSÃO TRANSIENTE NA INTERFACE PARA $\tau = 4,0$

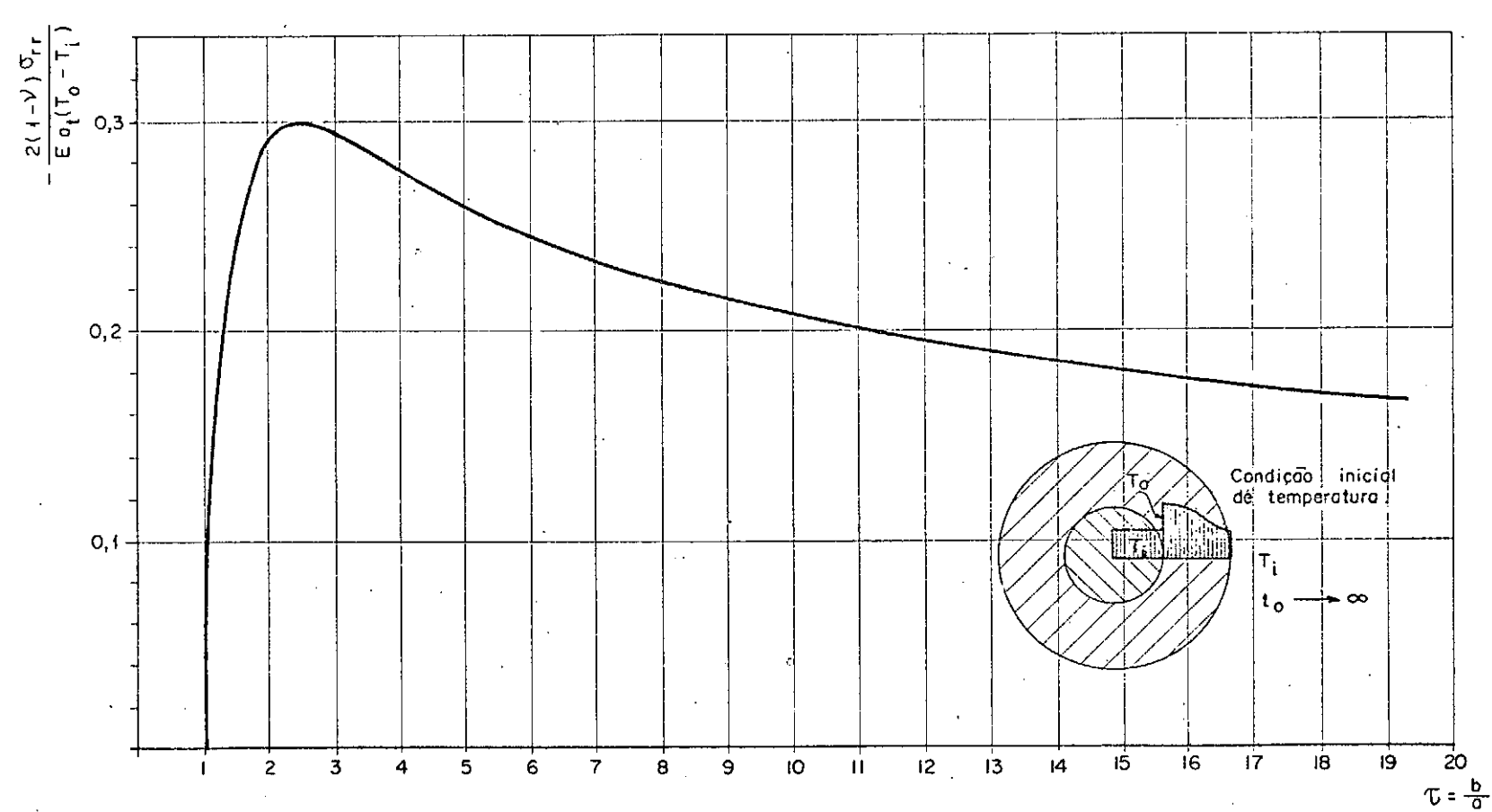


FIG. 6.6 - TENSÃO NORMAL NA INTERFACE EM REGIME PERMANENTE

CAPÍTULO VII

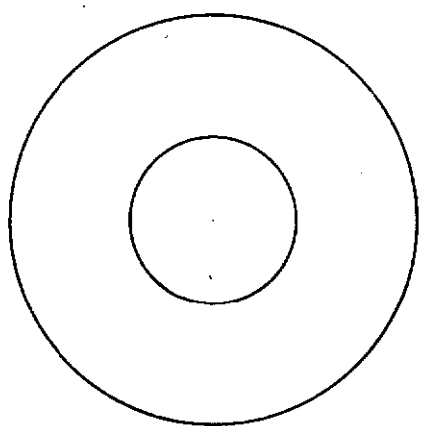
CONCLUSÕES

Pela observação da figura 5.1, referente ao deslocamento transiente no raio interno do cilindro, observa-se que quanto maior for a relação dos raios τ , mais lentamente o deslocamento vai tendendo ao valor estacionário, o que é evidente.

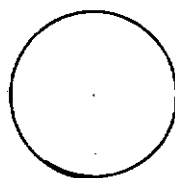
A figura 5.2, que representa o deslocamento no raio interno depois do campo de temperatura ter estacionado, apresenta um caso interessante, pois à medida que a relação dos raios tende ao infinito, o deslocamento tende a zero. Nota-se também que, quando esta relação tende ao valor um, o deslocamento toma o valor $a_t(1+\nu)(T_0-T_i)/2$, correspondendo ao obtido em uma casca cilíndrica circular, de parede delgada e infinita.

Nas figuras 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, correspondentes à tensão normal, na interface do acoplamento de um cilindro - oco com um maciço em regime transiente, para vários valores dos parâmetros τ e t_0 , constata-se, que a tensão apresenta um máximo para $t < \infty$. Esse máximo que à primeira vista parece estranho, no entanto, pode ser explicado da seguinte maneira: Durante o intervalo de tempo $0 \leq t < t_0$, no cilindro A (Fig.7.1)

É mantida no contorno interno uma temperatura T_0 constante, a qual forçosamente, provocará no raio correspondente o deslocamento dado na figura 5.1. Depois de ter percorrido esse lapso de tempo, a condição no contorno interno é alterada pela colocação do cilindro B (Fig. 7.1) à temperatura ambiente, sem folga dentro de A. Com isso, ocasionará um transiente de temperatura de tal maneira que em A a temperatura irá diminuindo, fazendo com que o raio interno tenda a diminuir; já no cilindro B o campo de temperatura vai aumentando o que resultará uma tendência a aumentar o raio, e em consequência disso, a tensão na interface vai aumentando. Depois de algum tempo o campo de temperatura em ambos os cilindros vai tendendo à do ambiente, ocasionando, com isso, um alívio de tensão. Finalmente, esta tenderá, assintoticamente, a um valor que é função de t_0 .



cilindro A



cilindro B

Fig. 7.1

Quando $t_0 \rightarrow \infty$, o valor assintótico está representado na figura 6.6, em função de τ . Pela observação desse gráfico, nota-se um caso curioso, pois à medida que a relação dos raios parte de um até o infinito, a tensão parte de zero e tende a zero e, para o valor $\tau \approx 2,4$, apresenta um máximo.

A expressão usada para o traçado da figura 6.6, pode ser obtida, a título de confirmação, por um processo diferente ao que foi aplicado neste trabalho. Processo este que é mais simples e feito com o auxílio da elasticidade linear, pois aquela tensão surge quando os dois cilindros estão em temperatura ambiente.

Sabe-se que a tensão na interface é função da interferência de montagem dos cilindros, sendo igual a [13].

$$\sigma_{rr} = - \frac{E}{2a(1-\nu^2)} \frac{\tau^2 - 1}{\tau^2} u_{rr} \quad (7.1)$$

Uma vez que o cilindro maciço, inicialmente, está à temperatura ambiente, a interferência é o próprio deslocamento do raio interno do cilindro oco, quando tomado por referência à temperatura do ambiente.

O valor desse deslocamento \bar{u} é dado pela fórmula 5.4 com a 5.5 igual a zero, isto é:

$$u_{rr} = \frac{a (1+\nu) a_t (T_0 - T_i)}{\tau^2 - 1} \left[\frac{\tau^2 - 1}{2 \ln \tau} - 1 \right] \quad (7.2)$$

Pela substituição de 7.2 em 7.1, tem-se o valor da tensão procurada, dado abaixo, que coincide com a expressão - 6.4 para $t_0 \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow \infty$.

$$\sigma_{rr} = - \frac{E a_t (T_0 - T_i)}{2 (1 - \nu) \tau^2} \left[\frac{\tau^2 - 1}{2 \ln \tau} - 1 \right] \quad (7.3)$$

Passa-se agora a analisar a tensão normal, em regime permanente, na interface do acoplamento de dois cilindros que satisfazem, plenamente, as seguintes condições:

1.^a) O campo de temperatura do cilindro A (Fig. 7.1), \bar{u} é constante e igual a T para $t = t_0$.

2.^a) O campo de temperatura do cilindro B (Fig. 7.1), \bar{u} também, é constante e igual a T_i (temperatura ambiente), para $t = t_0$.

3.^a) A temperatura no contorno $r = b$ é sempre igual \bar{a} do ambiente.

4.^a) No instante $t = t_0$ a interface dos dois cilindros é livre de tensões.

Evidentemente, após o acoplamento dos cilindros, surgirá um regime transitório de temperatura que tenderá à temperatura ambiente. Em consequência disto, a tensão normal no regime permanente pode ser determinada através da expressão 7.1, bastando, apenas calcular a interferência de montagem.

A interferência que é o próprio deslocamento do raio interno do cilindro oco, é expressa pela fórmula:

$$u_{rr} = a (1 + \nu) a_t (T - T_i) \quad (7.4)$$

Pela substituição de 7.4 em 7.1, conduz a:

$$\sigma_{rr} = - \frac{E a_t (T - T_i)}{2 (1 - \nu)} \frac{\tau^2 - 1}{\tau^2} \quad (7.5)$$

A figura 7.2 representa a tensão na interface contra a relação dos raios τ , traçada pelo uso da fórmula 7.5, através do programa de computação 4.5, do apêndice IV.

É interessante observar que quando τ parte de um até o infinito, a tensão parte de zero e tende, assintoticamente, a um valor constante sem passar por nenhum máximo em contraposição ao observado na figura 6.6.

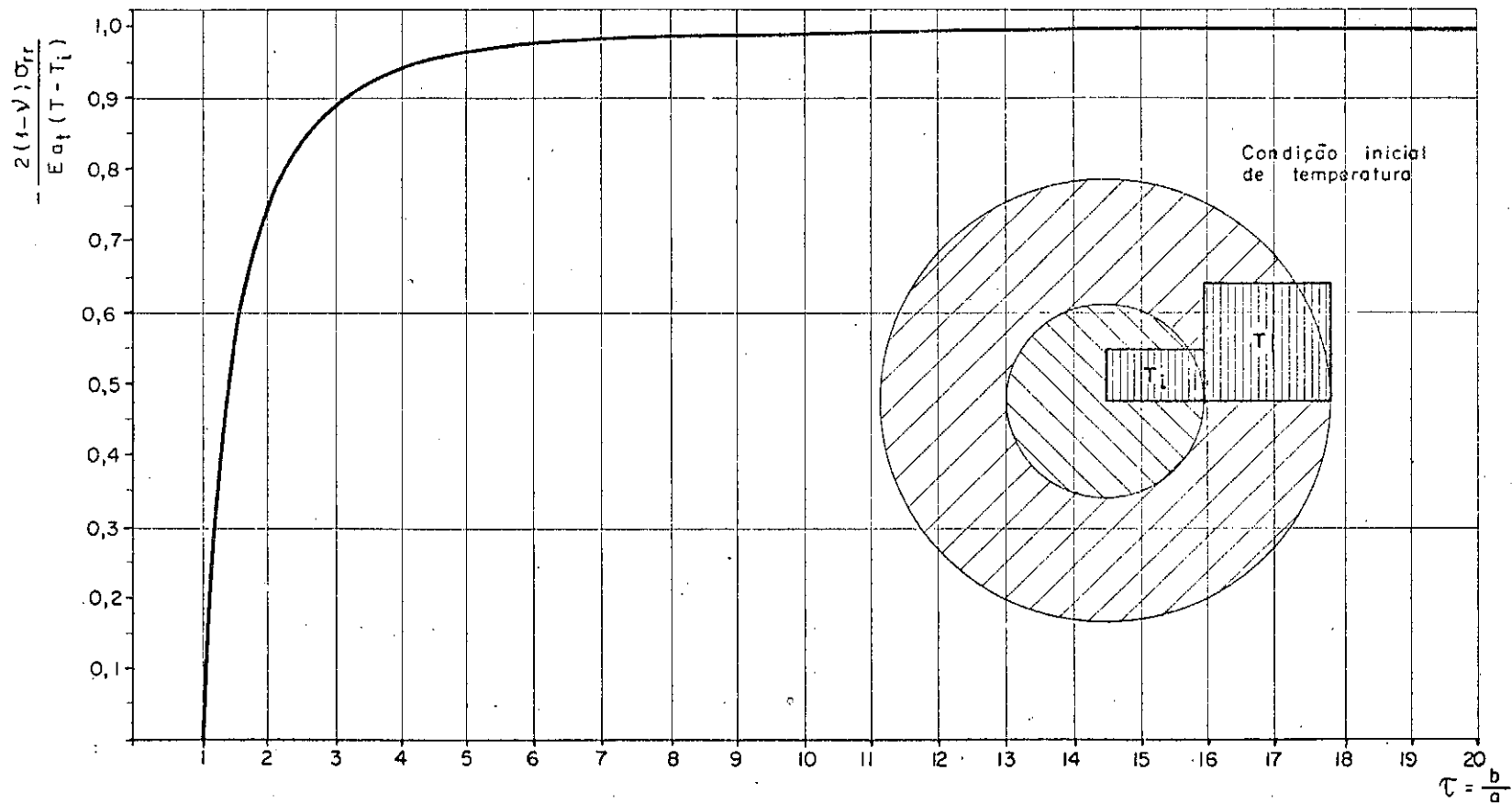


FIG. 7.2 - TENSÃO NORMAL NA INTERFACE EM REGIME PERMANENTE PARA CONDIÇÃO INICIAL CONSTANTE DE TEMPERATURA.

TRABALHOS FUTUROS

O autor pretende analisar oportunamente a tensão normal transiente na interface de dois cilindros, para o caso em que o externo tenha um campo constante de temperatura maior - que a do ambiente, antes de ser nele introduzido, sem folga, outro cilindro em temperatura ambiente.

Os trabalhos relativos a este estudo já foram iniciados e serão, futuramente, publicados.

APÊNDICE I

1.1 - TRANSFORMADA DE LAPLACE

Seja $F(t)$ uma função definida para $t > 0$. Então a transformada de Laplace de $F(t)$ é definida por:

$$\bar{F}(s) = \int_0^{\infty} F(t)e^{-st} dt \quad (A1.1)$$

Tal transformada existe se a integral A1.1 converge para algum valor de s .

1.2 - FUNÇÃO DE ORDEM EXPONENCIAL

Uma função $F(t)$ é dita de ordem exponencial k se existem as constantes $M > 0$ e $k > 0$ tal que $|F(t)| < M e^{kt}$ quando $t \rightarrow \infty$.

1.3 - CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA A EXISTÊNCIA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Se $F(t)$ for seccionalmente contínua em $0 \leq t \leq N$ e de ordem exponencial k para $t > N$, então a transformada $\bar{F}(s)$ existe para todo $s > k$.

1.4 - ALGUMAS PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Linearidade

$$\mathcal{L}\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{F_2(t)\} \quad (\text{A1.2})$$

Primeira Translação

Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = \bar{F}(s)$, então:

$$\mathcal{L}\{e^{ct} F(t)\} = \bar{F}(s-c) \quad (\text{A1.3})$$

Segunda Translação

$$\text{Se } \mathcal{L}\{F(t)\} = \bar{F}(s) \text{ e } G(t) = \begin{cases} F(t-c) & t > c \\ 0 & t < c \end{cases}$$

$$\text{então } \mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-cs} \bar{F}(s) \quad (\text{A1.4})$$

Mudança de Escala

Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = \bar{F}(s)$, então

$$\mathcal{L}\{F(ct)\} = \frac{1}{c} \bar{F}\left(\frac{s}{c}\right) \quad (\text{A1.5})$$

Transformada de Derivadas

Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = \bar{F}(s)$, então

$$\mathcal{L}\{F^{(j)}(t)\} = s^j \bar{F}(s) - s^{j-1}F(0) - s^{j-2}F'(0) - \dots - F^{(j-1)}(0) \quad (A1.6)$$

Tal expressão é verdadeira se $F(t), F'(t), \dots, F^{(j-1)}(t)$ forem contínuas para $0 \leq t \leq N$ e de ordem exponencial para $t > N$ enquanto que $F^{(j)}(t)$ for seccionalmente contínua em $0 \leq t \leq N$.

Transformada de Integral

$$\text{Se } \mathcal{L}\{F(t)\} = \bar{F}(s), \text{ então: } \mathcal{L}\left\{\int_0^t F(x)dx\right\} = \frac{\bar{F}(s)}{s} \quad (A1.7)$$

1.5 - TRANSFORMADA INVERSA

Se $\bar{F}(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ então a inversa $F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{F}(s)\}$ é dada por:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{F}(s) e^{st} ds \quad (A1.8)$$

Tal integração é feita ao longo da linha $s = \gamma$ a qual deve es-

tar à direita de todas as singularidades de $\bar{F}(s)$.

1.6 - CONTO RNO DE BROMWICH

O valor da integral A1.8 pode em certos casos ser determinada através da integração em um contorno C de tal maneira que todas as singularidades estejam dentro de C. (Fig.1.1).

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \bar{F}(s) e^{st} ds \quad (A1.9)$$

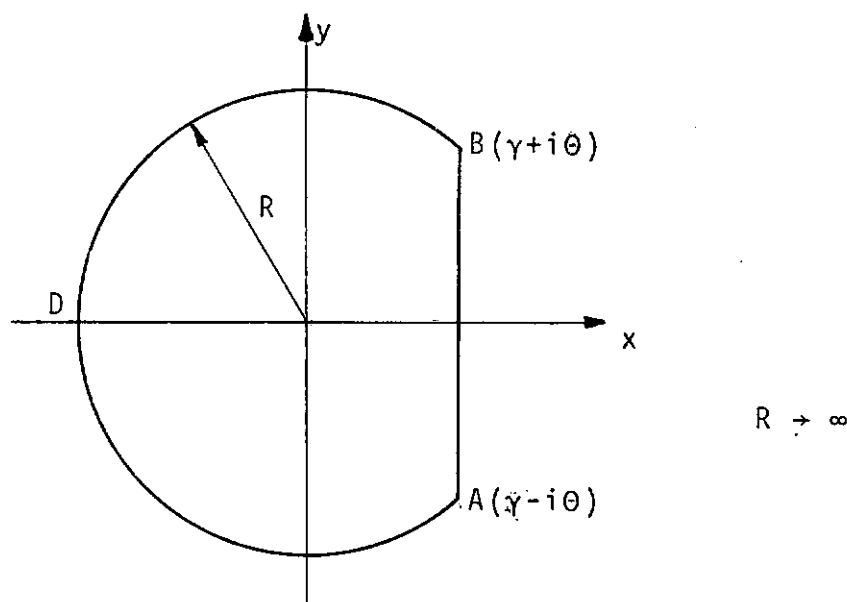


Fig. 1.1

1.7 - CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA QUE A INTEGRAL SOBRE O ARCO BDA SEJA ZERO.

Encontrando-se duas constantes $M > 0$ e $k > 0$, tal que no arco BDA:

$$|\bar{F}(s)| < \frac{M}{R^k} \quad (\text{A1.10})$$

Então a integral de $\bar{F}(s)e^{st}$ sobre esse arco é zero, quando $R \rightarrow \infty$.

Essa condição é suficiente para que se possa calcular a inversa da transformada pela fórmula A1.9.

1.8 - SINGULARIDADES: APENAS PÓLOS

Se todas as singularidades da função $\bar{F}(s)$ for apenas pólos; então a inversa, calculada por A1.9, é igual a soma dos resíduos de $\bar{F}(s)e^{st}$ nos pólos de $\bar{F}(s)$.

$$F(t) = \sum \text{resíduos de } \bar{F}(s) e^{st} \quad (\text{A1.11})$$

Caso Particular

$$\bar{F}(s) = \frac{P(s)}{s Q(s)} \quad (\text{A1.12})$$

Condições Impostas

$Q(s)$ apresenta apenas raízes simples, $a_j, j=1,2,\dots,N$.

$$P(0) \neq 0$$

(A1.13)

$$Q(0) \neq 0$$

$$P(a_j) \neq 0$$

Então a inversa será:

$$F(t) = \text{Res}(0) + \sum_{j=1}^N \frac{P(a_j)}{a_j \left(\frac{dQ}{ds} \right)_{s=a_j}} \quad (A1.14)$$

APÊNDICE II

2.1 - EQUAÇÃO DE BESSEL

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + (k^2 x^2 - n^2) y = 0 \quad (\text{A2.1})$$

2.2 - EQUAÇÃO DE BESSEL MODIFICADA

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) - (k^2 x^2 - n^2) y = 0 \quad (\text{A2.2})$$

2.3 - FUNÇÃO DE BESSEL DE PRIMEIRA ESPÉCIE DE ORDEM n

$$J_n(kx) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(kx/2)^{2j+n}}{j! \Gamma(k+n+1)} \quad (\text{A2.3})$$

2.4 - FUNÇÃO DE BESSEL DE SEGUNDA ESPÉCIE DE ORDEM n

$$Y_n(kx) = \frac{J_n(kx) \cos n\pi - J_{-n}(kx)}{\sin n\pi} \quad (\text{A2.4})$$

2.5 - FUNÇÃO DE BESSEL MODIFICADA DE PRIMEIRA ESPÉCIE DE ORDEM n

$$I_n(kx) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(kx/2)^{2j+n}}{j! \Gamma(k+n+1)} \quad (\text{A2.5})$$

2.6 - FUNÇÃO DE BESSEL MODIFICADA DE SEGUNDA ESPÉCIE DE ORDEM n

$$K_n(kx) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-n}(kx) - I_n(kx)}{\operatorname{sen} n\pi} \quad (\text{A2.6})$$

2.7 - ALGUMAS PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES DE BESSEL

DERIVAÇÕES.

$$\frac{d}{dx} [x^n Z_n(kx)] = \begin{cases} kx^n Z_{n-1}(kx) & Z = J, Y, I \\ -kx^n Z_{n-1}(kx) & Z = K \end{cases} \quad (\text{A2.7})$$

(A2.8)

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} Z_n(kx)] = \begin{cases} -kx^{-n} Z_{n+1}(kx) & Z = J, Y, K \\ kx^{-n} Z_{n+1}(kx) & Z = I \end{cases} \quad (\text{A2.9})$$

(A2.10)

Caso Particular

$$\frac{d}{dx} [Z_0(kx)] = \begin{cases} -kZ_1(kx) & Z = J, Y, K \\ kZ_1(kx) & Z = I \end{cases} \quad (\text{A2.11})$$

(A2.12)

RELAÇÕES ENTRE ALGUMAS FUNÇÕES

$$J_n(xe^{ikx}) = e^{ikx} J_n(x) \quad (A2.13)$$

$$I_n(xe^{\pm i\pi/2}) = e^{\pm in\pi/2} J_n(x) \quad (A2.14)$$

$$K_n(xe^{\pm i\pi/2}) = \pm i\pi/2 e^{\mp in\pi/2} [-J_n(x) \pm iY_n(x)] \quad (A2.15)$$

$$J_n(x) Y_{n+1}(x) - J_{n+1}(x) Y_n(x) = -\frac{2}{\pi x} \quad (A2.16)$$

$$I_n(x) K_{n+1}(x) - I_{n+1}(x) K_n(x) = 1/x \quad (A2.17)$$

FUNÇÕES DE BESSEL PARA PEQUENOS ARGUMENTOS

$$I_0(x) \approx 1 \quad (A2.18)$$

$$I_1(x) \approx x/2 \quad (A2.19)$$

$$K_0(x) \approx -\ln x \quad (A2.20)$$

$$K_1(x) \approx 1/x \quad (A2.21)$$

INTEGRAIS ENVOLVENDO FUNÇÕES DE BESSEL

$$\int x Z_0(kx) dx = \begin{cases} \frac{1}{k} x Z_1(kx) & Z = J, Y \end{cases} \quad (A2.22)$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{k} x Z_1(kx) & Z = K \end{cases} \quad (A2.23)$$

$$\begin{aligned} \int x Z_0(kx) K_0(\ell x) dx &= \\ &= \frac{kx Z_1(kx) K_0(\ell x) - \ell x Z_0(kx) K_1(\ell x)}{k^2 + \ell^2} \quad Z = J, Y \end{aligned} \quad (A2.24)$$

$$\begin{aligned} \int x Z_0(kx) I_0(\ell x) dx &= \\ &= \frac{kx Z_1(kx) I_0(\ell x) + \ell x Z_0(kx) I_1(\ell x)}{k^2 + \ell^2} \quad Z = J, Y \end{aligned} \quad (A2.25)$$

$$\int x \ln x K_0(kx) dx = -\frac{x \ln x K_1(kx)}{k} - \frac{K_0(kx)}{k^2} \quad (A2.26)$$

$$\int x \ln x I_0(kx) dx = \frac{x \ln x I_1(kx)}{k} - \frac{I_0(kx)}{k^2} \quad (A2.27)$$

APÊNDICE III

3.1 - PRIMEIRAS DEZ RAÍZES DE $J_n(x)$, $n = 0, 1, 2, 3$

	J_0	J_1	J_2	J_3
1	2,4048	3,8317	5,1356	6,3802
2	5,5201	7,0156	8,4172	9,7610
3	8,6537	10,1735	11,6198	13,0152
4	11,7915	13,3237	14,7960	16,2235
5	14,9309	16,4706	17,9598	19,4094

TAB. A3.1

3.2 - PRIMEIRAS CINCO RAÍZES DE $J_0(x)Y_0(\tau x) - J_0(\tau x)Y_0(x) = 0$.

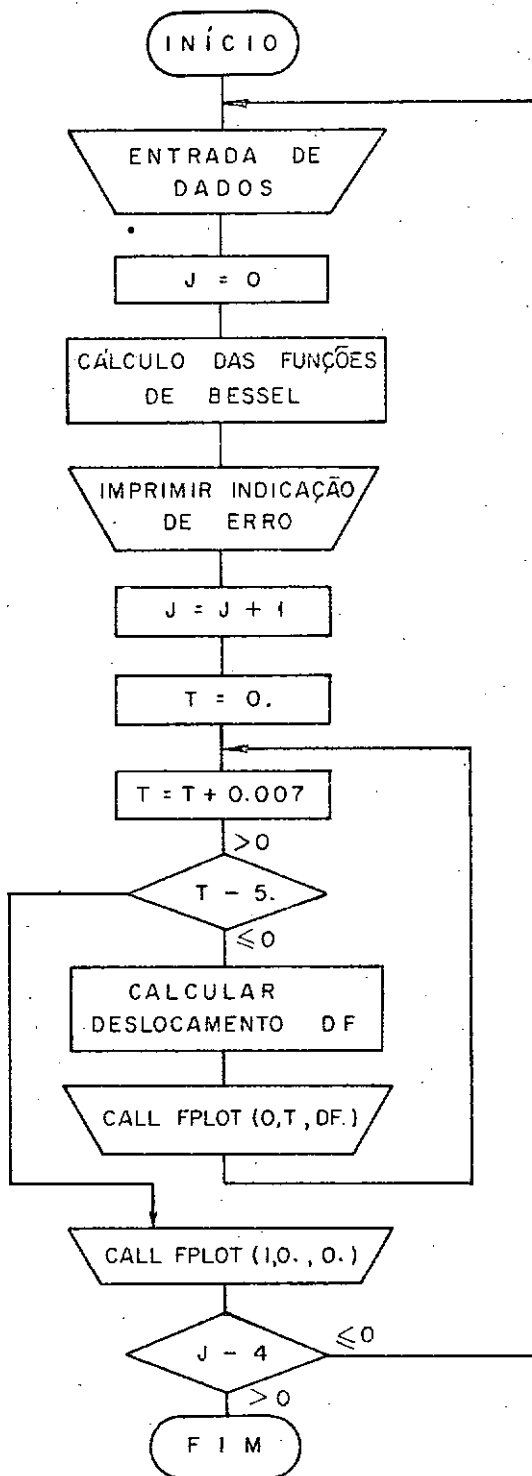
τ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1,2	15,7014	31,4126	47,1217	62,8302	78,5385
1,5	6,2702	12,5598	18,8451	25,1294	31,4133
2,0	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614	15,7040
2,5	2,0732	4,1773	6,2754	8,3717	10,4672
3,0	1,5485	3,1291	4,7038	6,2767	7,8487
3,5	1,2339	2,5002	3,7608	5,0196	6,2776
4,0	1,0244	2,0809	3,1322	4,1816	5,2301

TAB. A3.2

APENDICE IV

DIAGRAMAS DE BLOCO E PROGRAMAS PARA COMPUTADORES

4-1 GRÁFICO DO DESLOCAMENTO TRANSIENTE NO RAI0 INTERNO DO CILINDRO



PAGE 1

// JOB 0019

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0019	0019	0000

V2 M09 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

*IOCS(CARD,1132PRINTER)

*IOCS(PLOTTER)

*ONE WORD INTEGERS

*LIST SOURCE PROGRAM

DIMENSION AL(10),BO(10),IO(10)

C GRAFICO DO DESLOCAMENTO TRANSIENTE NO RAO INTERNO DO
C CILINDRO

WRITE(3,1)

1 FORMAT(2X,'AL(N)',7X,'BO(N)',7X,'IO(N)')

CALL SCALF(1.5,8.,0.,0.)

CALL FGRID(0,0.,0.,0.1,50)

CALL FGRID(1,0.,0.,0.02,25)

J=0

4 READ(2,3). (AL(K),K=1,5),TA

3 FORMAT(5F7.4,F4.1)

C=1./(TA**2-1.)

D=(TA**2-1.)/(2.*ALOG(TA))-1.

DO 10 N=1,5

CALL FPLLOT(-2,0.,0.)

10 AL(N+5)=TA*AL(N)

WRITE(3,2) TA

2 FORMAT(1X,F4.1,/))

DO 20 N=1,10

CALL BESJ(AL(N),0,BO(N),0.00001,IO(N))

20 WRITE(3,80) AL(N),BO(N),IO(N)

80 FORMAT(1X,F7.4,5X,F7.4,7X,I1)

J=J+1

T=0.

30 T=T+0.007

U=0.

IF(T-5.)40,40,60

40 DO 70 I=1,5

Y=1./((AL(I)**2)*(1.+BO(I)/BO(I+5)))

TE=-(AL(I)**2)*T

E=EXP(TE)

70 U=Y*E+U

DF=C*(D+4.*U)

CALL FPLLOT(0,T,DF)

GO TO 30

60 CALL FPLLOT(1,0.,0.)

PAGE 2

IF(J-4)4,4,9
9 CALL EXIT
END

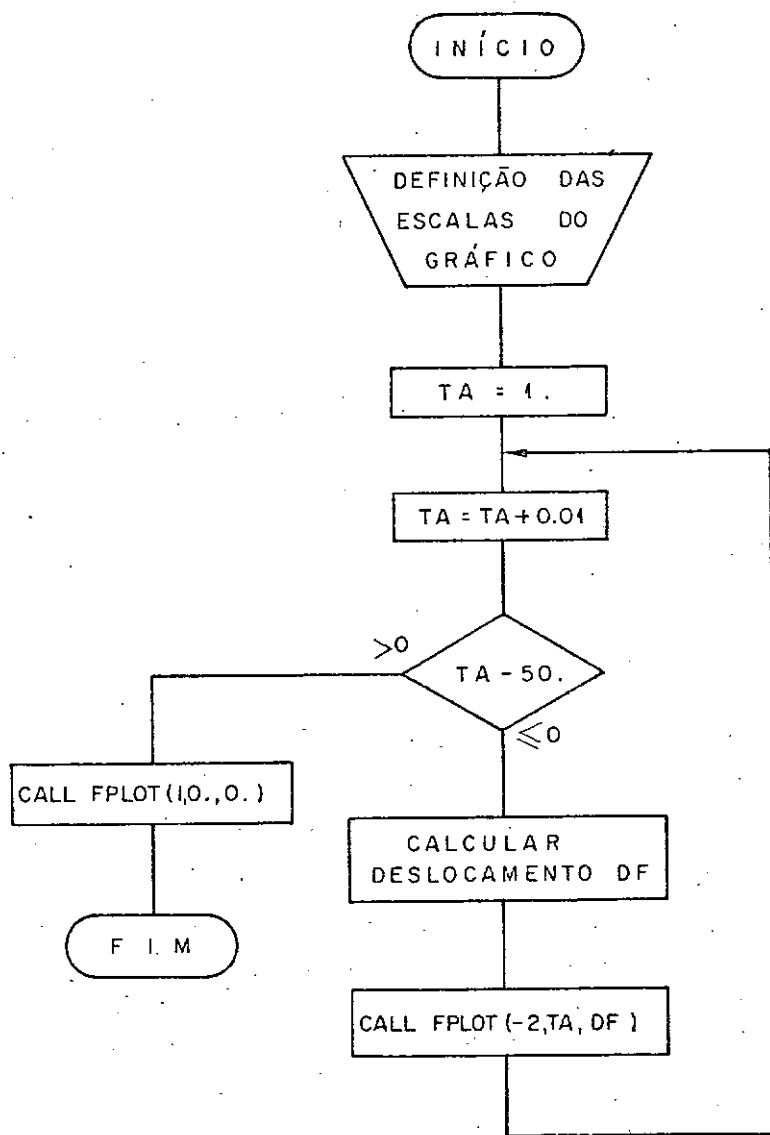
FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR			
COMMON	0	VARIABLES	78
		PROGRAM	416

END OF COMPILATION

// XEQ

4-2 - GRÁFICO DO DESLOCAMENTO NO RAI0 INTERNO DO CILINDRO
EM REGIME PERMANENTE .



PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0019	0019	0000

V2 M09 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

*IOCS(CARD,1132PRINTER)

*IOCS(PLOTTER)

*ONE WORD INTEGERS

*LIST SOURCE PROGRAM

C GRAFICO DO DESLOCAMENTO NO RAO INTERNO DO CILINDRO
C EM REGIME PERMANENTE

CALL SCALF(0.1488,8.,0.,0.)

CALL FGRID(0,0.,0.,2.,25)

CALL FGRID(1,0.,0.,0.02,25)

TA=1.

10 TA=TA+0.01

IF(TA-50.)40,40,60

40 C=1./(TA**2-1.)

D=(TA**2-1.)/(2.*ALOG(TA))-1.

DF=C*D

CALL FPLOT(-2,TA,DF)

GO TO 10

60 CALL FPLOT(1,0.,0.)

CALL EXIT

END

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

IOCS

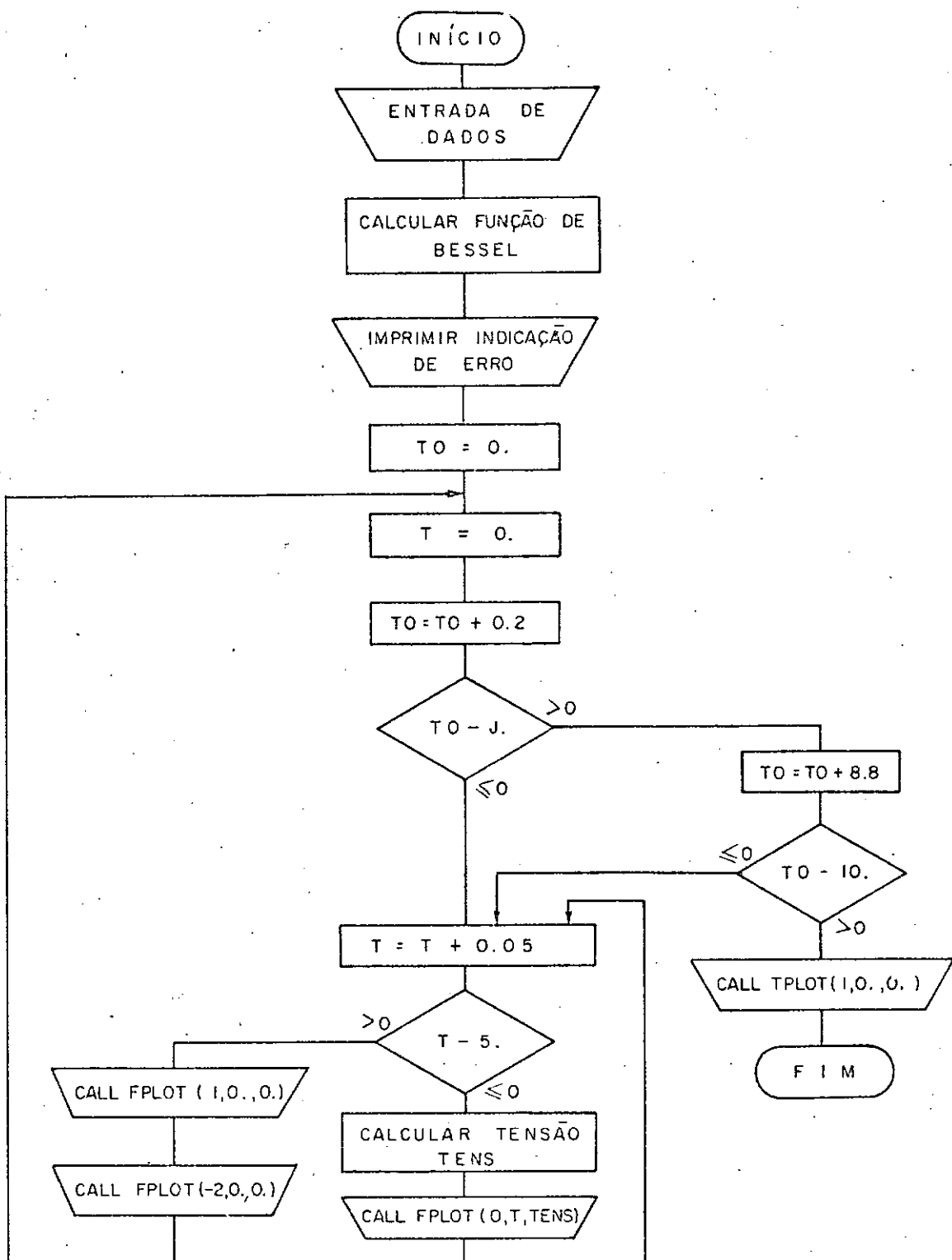
CORE REQUIREMENTS FOR

COMMON	0	VARIABLES	10	PROGRAM	134
--------	---	-----------	----	---------	-----

END OF COMPILATION

// XEQ

4-3 GRÁFICO DA TENSÃO NORMAL TRANSIENTE NA INTERFACE



PAGE 1

// JOB 0019

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0019	0019	0000

V2 M09 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

*IOCS(CARD,1132PRINTER)

*IOCS(PLOTTER)

*ONE WORD INTEGERS

*LIST SOURCE PROGRAM

DIMENSION AL(10),DL(10),BO(10),DO(10),D1(10),IO(10),JO(10)

1 ,J1(10)

C GRAFICO DA TENSÃO NORMAL TRANSIENTE NA INTERFACE

READ(2,3) (AL(J),J=1,5),(DL(K),K=6,10),TA

3 FORMAT(10F7.4,F4.1)

C=1./TA**2

D=(TA**2-1.)/(2.*ALOG(TA))-1.

CALL SCALF(1.5,8.,0.,0.)

CALL FGRID(0,0.,0.,0.1,50)

CALL FGRID(1,0.,0.,0.02,25)

CALL FPLOT(-2,0.,0.)

DO 10 N=1,5

10 AL(N+5)=TA*AL(N)

DO 11 N=6,10

11 DL(N-5)=DL(N)/TA

DO 20 N=1,10

CALL BESJ(AL(N),0,BO(N),0.01,IO(N))

CALL BESJ(DL(N),0,DO(N),0.01,JO(N))

CALL BESJ(DL(N),1,D1(N),0.01,J1(N))

20 CONTINUE

WRITE(3,2) TA

2 FORMAT(1X,F4.1,/))

WRITE(3,1)

1 FORMAT(2X,'AL(N)',7X,'BO(N)',9X,'IO(N)')

WRITE(3,80) (AL(N),BO(N),IO(N),N=1,10)

80 FORMAT(1X,F7.4,5X,F7.4,9X,11)

WRITE(3,90)

90 FORMAT(2X,'DL(M)',7X,'DO(M)',9X,'JO(M)')

WRITE(3,80) (DL(M),DO(M),JO(M),M=1,10)

WRITE(3,110)

110 FORMAT(2X,'DL(M)',7X,'D1(M)',9X,'J1(M)')

WRITE(3,80) (DL(M),D1(M),J1(M),M=1,10)

TO=0.

63 T=0.

TO=TO+0.2

U=0.

PAGE 2

```

      IF(T0-1.)40,40,65
65  T0=T0+8.8
      IF(T0-10.)40,40,64
40  DO 70 I=1,5
      Y=1./((AL(I)**2)*(1.+BO(I)/BO(I+5)))
      TE0=-(AL(I)**2)*T0
      E0=EXP(TE0)
70  U=Y*E0+U
62  T=T+0.05
      S=0.
      IF(T-5.)50,50,61
50  DO 300 M=1,5
      TE=-(DL(M)**2)*T
      E=EXP(TE)
      Z=-D1(M)+D0(M)/(ALOG(TA)*DL(M))
      W=2.*DL(M)*D0(M)
      X=(TA*D1(M)-D1(M+5))*E/(DL(M)*D1(M+5))**2
      P=0.
      DO 301 N=1,5
      TE0=-(AL(N)**2)*T0
      E0=EXP(TE0)
      P1=BO(N+5)**2*E0/((BO(N+5)**2-BO(N)**2)*(AL(N)**2-DL(M)**2))
301  P=P1+P
      S1=-(Z+W*P)*X
300  S=S1+S
      TENS=C*(D+4.*U+(4./TA)*S)
      CALL FPLLOT(0,T,TENS)
      GO TO 62
61  CONTINUE
      CALL FPLLOT(1,0.,0.)
      CALL FPLLOT(-2,0.,0.)
      GO TO 63
64  CONTINUE
      CALL FPLLOT(1,0.,0.)
      CALL EXIT
      END

```

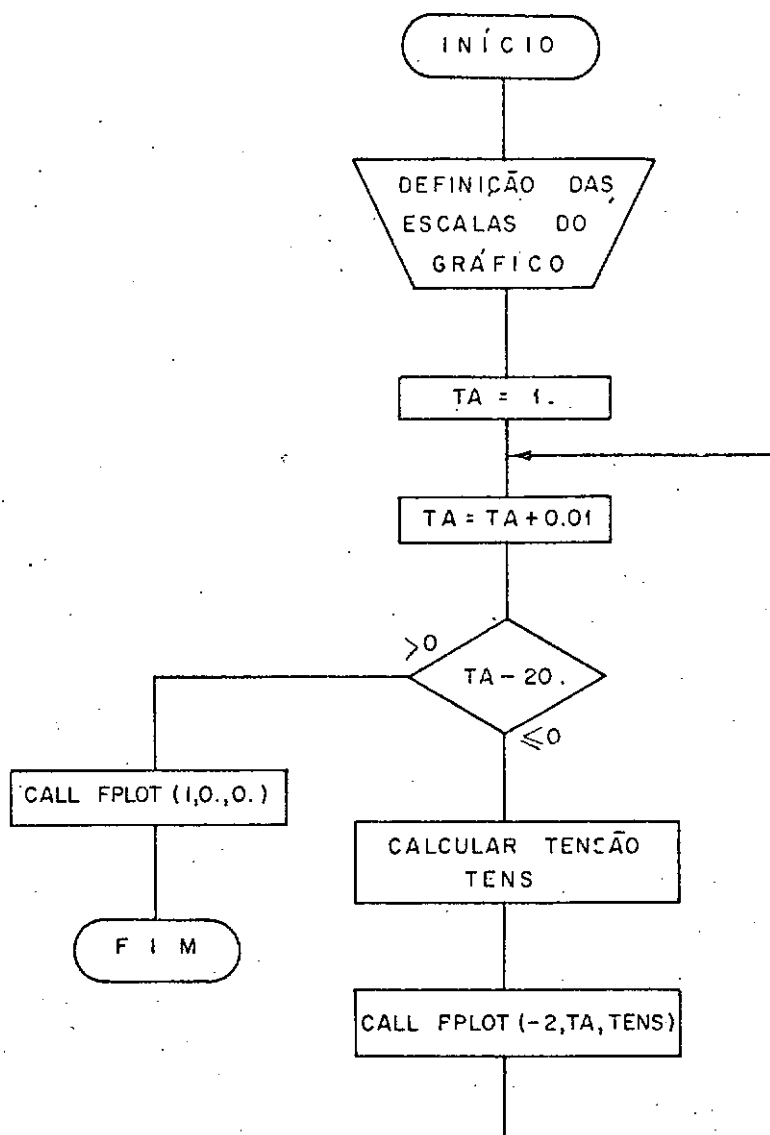
FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON 0 VARIABLES 186 PROGRAM 920

END OF COMPILATION

// XEQ

4.4 - GRÁFICO DA TENSÃO NORMAL NA INTERFACE EM REGIME PERMANENTE



PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0019	0019	0000

V2 M09 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

*IOCS(CARD,1132PRINTER)

*IOCS(PLOTTER)

*ONE WORD INTEGERS

*LIST SOURCE PROGRAM

```

C   GRAFICO DA TENSÃO NORMAL NA INTERFACE EM REGIME PERMANENTE
    CALL SCALF(0.372,12.,0.,0.)
    CALL FGRID(0,0.,0.,1.,20)
    CALL FGRID(1,0.,0.,0.02,17)
    TA=1.
10  TA=TA+0.01
    IF(TA=20.)40,40,60
40  C=1./TA**2
    D=(TA**2-1.)/(2.*ALOG(TA))-1.
    TENS=C*D
    CALL FPLOT(-2,TA,TENS)
    GO TO 10
60  CALL FPLOT(1,0.,0.)
    CALL EXIT
    END
  
```

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

IOCS

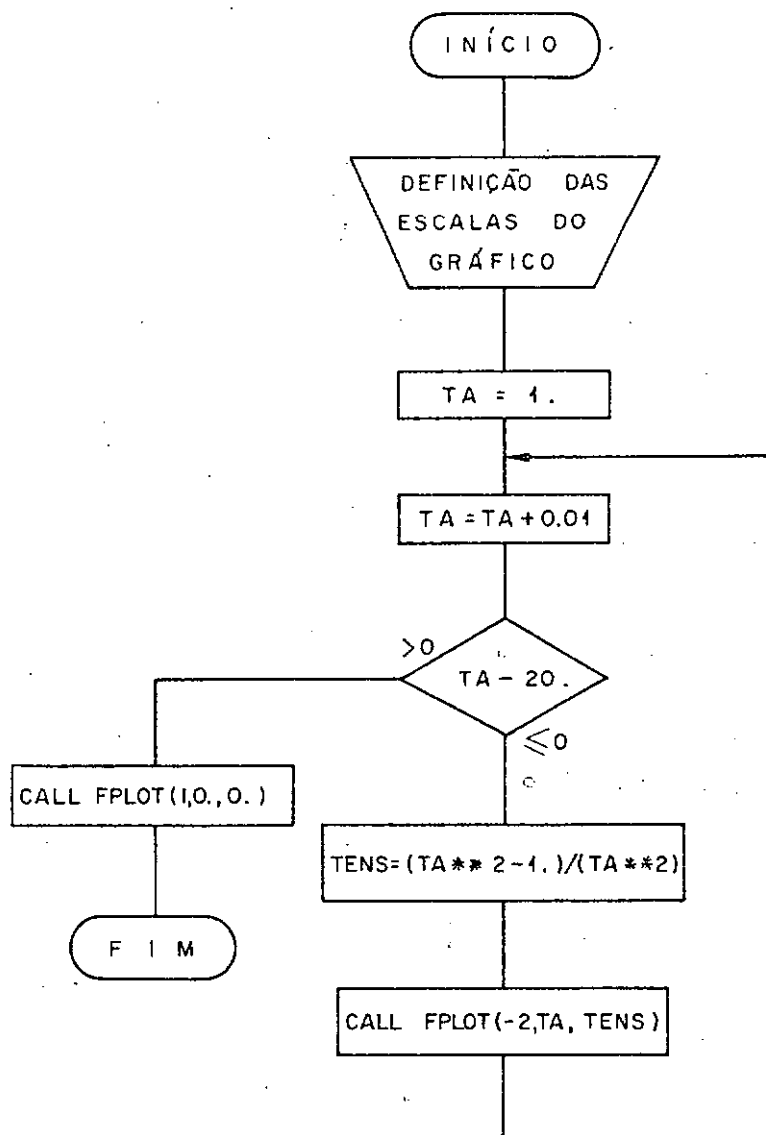
CORE REQUIREMENTS FOR

COMMON	0	VARIABLES	10	PROGRAM	132
--------	---	-----------	----	---------	-----

END OF COMPILATION

// XEQ

4-5 GRÁFICO DA TENSÃO NORMAL NA INTERFACE EM REGIME PERMANENTE
PARA CONDIÇÃO INICIAL CONSTANTE DE TEMPERATURA.



PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0019	0019	0000

V2 M09 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

*IOCS(CARD,1132PRINTER)

*IOCS(PLOTTER)

*ONE WORD INTEGERS

*LIST SOURCE PROGRAM

C GRAFICO DA TENSÃO NORMAL NA INTERFACE EM REGIME PERMANENTE
C PARA CONDIÇÃO INICIAL CONSTANTE DE TEMPERATURA

CALL SCALF(0.372,4.,0.,0.)

CALL FGRID(0,0.,0.,1.,20)

CALL FGRID(1,0.,0.,0.05,21)

TA=1.

10 TA=TA+0.01

IF(TA-20.)40,40,60

40 TENS=(TA**2-1.)/(TA**2)

CALL FPLOT(-2,TA,TENS)

GO TO 10

60 CALL FPLOT(1,0.,0.)

CALL EXIT

END

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR

COMMON 0 VARIABLES

6 PROGRAM

114

END OF COMPILATION

// XEQ

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] NOWACKI, W. - "Thermoelasticity" - Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1962.
- [2] PARKUS, H. - "Thermoelasticity" - Blaisdell Publishing Company, London, 1968.
- [3] ARPACI, V.S. - "Conduction Heat Transfer" - Addison - Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1966.
- [4] ÖZISIK, N.M. - "Boundary Value Problems of Heat Conduction" - International Textbook Company, Pennsylvania, 1968.
- [5] KREITH, F. - "Principles of Heat Transfer" - International Textbook Company, Pennsylvania, 1965.
- [6] SCHNEIDER, P.I. - "Conduction Heat Transfer" - Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1955.

- [7] SPIEGEL, M.R. - "Laplace Transforms" - Schaum Publishing Company, Inc., New York, 1965.
- [8] COURANT, R. - "Cálculo Diferencial e Integral" - vol. II, Editora Globo, Porto Alegre, 1963.
- [9] WATSON, G.N. - "A treatise on the Theory of Bessel Functions" - The Syndics on the Cambridge University Press, London, 1962.
- [10] COURANT, R. - "Cálculo Diferencial e Integral" - vol. I, Editora Globo, Porto Alegre, 1963.
- [11] CARRIER, G.F., KROOK, M., PEARSON, C.E. - "Functions of Complex Variables" - McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1966.
- [12] SMIRNOV, V.I. - "A course of Higher Mathematics" - vol. III, part two, Pergamon Press Ltd, London, 1964.
- [13] TIMOSHENKO, S. e GOODIER, J.N. - "Theory of Elasticity" - McGraw Hill Book Company, Inc., 1951.